解答例

STEP II 2010、第 5 問

純粋数学 • ベクトルのなす角と円錐

STEP II 2010、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s2-q5

鍵となる考え方

ここでのすべては、ただ一つの事実に帰着する。方向ベクトル（direction vector）$\mathbf{d}$ をもつ直線とベクトル $\mathbf{a}$ のなす角 θ は $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\,|\mathbf{a}|}$ を満たす、という事実である。「等しく傾いている」や「角 α で傾いている」という条件は、そのまま $\mathbf{d}$ の成分についての方程式になる。最後の小問では、直交座標による方程式（Cartesian equation）が、直前に求めた関係式と同じ形をしていることに注目しよう。O を通り、固定された直線とすべて同じ角をなす直線の集まりは、円錐（cone）である。

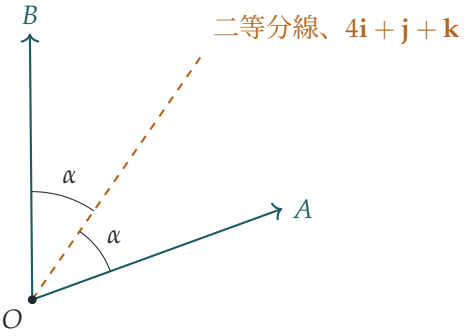
解答

$\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$、$\mathbf{b} = 5\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ とおくと、$|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$、$|\mathbf{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ である。また $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5-1-1 = 3$ である。したがって

$$\cos 2\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

$\cos 2\alpha > 0$ であるから角 2α は鋭角であり、α は 0 と $\frac{\pi}{4}$ の間にある。後で次の値が必要になる。

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) = \tfrac{2}{3}.$$



（図は平面 OAB を模式的に示したものにすぎない。）

小問 (i)

L_1 の方向を $\mathbf{d} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ とする。$\mathbf{d}$ が OA、OB となす角の余弦は、それぞれ

$$\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\sqrt{3}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|} \qquad \text{および} \qquad \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{d}|\,3\sqrt{3}} = \frac{5m-n-p}{3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|}.$$

である。cos は $[0,\pi]$ 上で単射（one-to-one）であるから、角が等しいことは余弦が等しいことと同値である。両辺に $3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|$ を掛けると

$$3(m+n+p) = 5m-n-p \quad\Longleftrightarrow\quad m = 2(n+p).$$

を得る。

考えてみよう 直線には決まった向きがない。直線が OA とは角 θ をなし、OB とは $\pi-\theta$ をなす場合はどうなるだろうか。

「2 直線のなす角」を鋭角の方と解釈するなら、余弦は符号を除いて等しければよい。もう一方の符号からは $3(m+n+p) = -(5m-n-p)$、すなわち $4m+n+p=0$ が得られる。これらの直線は、O を通り二等分線に垂直な平面上にあり、この平面は $\angle AOB$ の外角の二等分線（external bisector）を含む。想定されている答えは $m=2(n+p)$ であるが、第二の族が存在することも知っておく価値がある。

$\angle AOB$ の二等分線（angle bisector）を求めるには、OA と OB に沿う**単位**ベクトル（unit vector）を足し合わせる。2 つの単位ベクトルはひし形（rhombus）を張るので、その和は両者のなす角を二等分する。よって

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3\sqrt{3}},$$

であり、$m=4$、$n=1$、$p=1$（あるいはその 0 でない任意の定数倍）ととることができる。確認として、$4 = 2(1+1)$ であるから、この方向は上の関係式を満たしている。

小問 (ii)

L_2 の方向を $\mathbf{e} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ とする。この直線が OA と角 α をなすのは

$$\frac{u+v+w}{\sqrt{3}\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \pm\cos\alpha.$$

のときである。$\pm$ は直線に沿ったどちらの向きも許すためのものである。両辺を 2 乗すると符号が消え、$\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$ を用いると

$$(u+v+w)^2 = 2(u^2+v^2+w^2).$$

を得る。左辺を $u^2+v^2+w^2+2(vw+wu+uv)$ と展開して整理すると、次の関係式が得られる。

$$u^2+v^2+w^2 = 2(vw+wu+uv).$$

考えてみよう 方向についての条件が、どのようにして曲面になるのだろうか。

任意の点 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ をとる。この点は O を通るちょうど 1 本の直線、すなわち方向 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ をもつ直線上にある。小問 (ii) により、この点が

$$x^2+y^2+z^2 = 2(yz+zx+xy)$$

を満たすのは、その点を通る O からの直線が OA と角 α をなすとき、かつそのときに限る。原点もこの方程式を満たす。したがって、この曲面は O を通り直線 OA に対して角 α で傾いたすべての直線の和集合である。

これは、頂点が原点、軸が直線 $x=y=z$（直線 OA）である**（二葉の）直円錐**（right circular cone）である。その半頂角（semi-vertical angle）α は

$$\cos\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad \tan\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha \approx 35.3^\circ,$$

を満たし、これは $\angle AOB$ のちょうど半分である。μ がすべての実数を動くので、この円錐は 2 つの葉（nappe）をもつ。小問 (i) の二等分線はこの円錐上にある。実際 $(4,1,1)$ について $16+1+1 = 18 = 2(1+4+4)$ となる。

検算

- 点 $(1,1,0)$ は $2 = 2(0+0+1)$ を満たす。この点の方向と $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ のなす角の余弦は $2/(\sqrt{2}\sqrt{3}) = \sqrt{2/3}$ であり、確かにそうなっている。
- 数値的には $\arccos(1/3)/2 = 0.61548\,\text{rad}$ であり、二等分線 $4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ は OA とも OB とも 0.61548 rad の角をなす。

- c を $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ とのなす角の余弦とすると、恒等式 $x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy)=(x^2+y^2+z^2)(2-3c^2)$ が成り立つ。よって左辺が 0 になるのは、ちょうど $c^2=\frac{2}{3}$ のときである。

よくある間違い

- **単位**ベクトルの和ではなく $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ で二等分してしまう。$|\mathbf{b}|\neq|\mathbf{a}|$ であるから、$\mathbf{a}+\mathbf{b}=6\mathbf{i}$ は二等分線ではない。
- $\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos 2\alpha$ のような式を使ってしまう。必要なのは倍角の公式（double-angle formula）$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ である。
- 頂点、軸、半頂角を示さずに、曲面を単に「円錐」とだけ述べてしまう。

STEP のその先へ

この円錐の方程式は**二次形式**（quadratic form）$\mathbf{x}^{\mathsf{T}}M\mathbf{x}=0$ であり、M は対称行列（symmetric matrix）である。大学 1 年の線形代数（linear algebra）では、このような曲面を M の固有値（eigenvalue）によって分類する。ここでの M は対角成分が 1、非対角成分が -1 であるから、その固有値は -1（$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 方向）と 2（重複度 2）である。負の固有値が 1 つ、等しい正の固有値が 2 つというのは、まさに、仲間外れの固有値に対応する固有ベクトル（eigenvector）を軸とする円錐の符号（signature）である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）では、対称行列と二次形式を扱う箇所でこの内容が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。