解答例

STEP II 2010、第 4 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP II 2010、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q4

鍵となる考え方

置換（substitution）$u = a - x$ は区間の両端を入れ替え、$f(x)$ を $f(a-x)$ に、またその逆に変える。したがって、この積分は、分子が分母のもう一方の項に置き換わった「相方」の積分に等しい。2 つの形を足し合わせると分子が分母に等しくなり、被積分関数（integrand）は 1 になる。この問題の残りの部分は、この構造が姿を変えて現れているのを見抜けるかどうかにかかっている。小問 (ii) では、$[\frac{1}{2}, 2]$ の両端を入れ替える置換 $x \mapsto 1/x$ を用いて同じ手法を使う。

解答

小問 (i)

以下では常に $[0, a]$ 上で $f(x) + f(a-x) \neq 0$ であると仮定する。これにより被積分関数は定義される。I において $u = a - x$ と置換すると、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ である。$x = 0$ のとき $u = a$、$x = a$ のとき $u = 0$ である。よって

$$I = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}\,\mathrm{d}u.$$

u はダミー変数（dummy variable）であるから x と書き換えてよく、これにより求める I の第 2 の形が得られる。

次に、I の 2 つの表示を足し合わせる。

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a, \qquad \text{よって} \qquad I = \frac{a}{2}.$$

第 1 の積分。

考えてみよう $\ln(2+x-x^2)$ のどこに $f(x)+f(a-x)$ が隠れているだろうか。

この 2 次式は $2+x-x^2=(1+x)(2-x)$ と因数分解できる。したがって

$$\ln(2+x-x^2)=\ln(1+x)+\ln(2-x),$$

が成り立つ。$[0,1]$ 上で 2 つの因数はともに正であるから、これは正しい。$a=1$、$f(x)=\ln(1+x)$ とおく。すると $f(1-x)=\ln(2-x)$ であり、被積分関数はちょうど $\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$ となる。$[0,1]$ 上で $2+x-x^2\geq 2$ であるから、分母が零になることはない。したがって

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\ln(2+x-x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

第 2 の積分。 加法定理（compound-angle formula）を用いて分母を展開する。

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{4})=\sin x\cos\tfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\tfrac{\pi}{4}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}.$$

よって被積分関数は $\sqrt{2}\,\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ である。$a=\frac{\pi}{2}$、$f=\sin$ とすると、$f(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ である。分母 $\sin x+\cos x$ は $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上で正である。上の結果により

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

小問 (ii)

この積分を J とおく。被積分関数は $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x+\sin(1/x)}$ である。分母に問題はない。$x\in[\frac{1}{2},2]$ のとき、x と $1/x$ はともに $[\frac{1}{2},2]\subset(0,\pi)$ に属するので、$\sin x>0$ かつ $\sin(1/x)>0$ である。

考えてみよう $\sin x$ と $\sin\frac{1}{x}$ を入れ替え、しかも積分区間の端 $\frac{1}{2}$ と 2 を保つ置換はどれだろうか。

答えは $x=1/u$ である。このとき $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$ である。$x=\frac{1}{2}$ のとき $u=2$、$x=2$ のとき $u=\frac{1}{2}$ である。因子 $\frac{1}{x}$ は u になるので

$$J=\int_2^{1/2} u\cdot\frac{\sin(1/u)}{\sin(1/u)+\sin u}\cdot\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big)=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin(1/u)}{u(\sin u+\sin\frac{1}{u})}\,\mathrm{d}u.$$

u を x と書き換え、これを J のもとの形と足し合わせると

$$2J=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin x+\sin\frac{1}{x}}{x(\sin x+\sin\frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x=\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln\tfrac{1}{2}=2\ln 2.$$

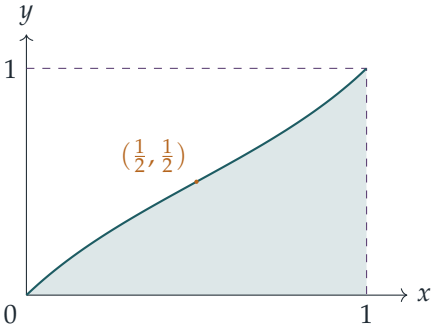
よって

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\sin x}{x(\sin x + \sin \frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

ここでは因子 $\frac{1}{x}$ が本質的である。$\mathrm{d}x$ が $x \mapsto a - x$ で変わらないのと同じように、測度（measure）$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ は $x \mapsto 1/x$ で（向きを除いて）変わらない。

検算

- 被積分関数 $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}$ は $g(x) + g(a-x) = 1$ を満たす。したがってそのグラフは点 $(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$ に関して点対称（半回転で不変）であり、グラフの下の面積は $a \times 1$ の長方形の面積の半分となる。下図は第 1 の積分についてこのことを示している。



- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により、第 1 の積分は 0.500000、第 2 の積分は 1.110721（実際 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \approx 1.110721$）、小問 (ii) は 0.693147（実際 $\ln 2 \approx 0.693147$）となる。

よくある間違い

- $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ を書き換える際に因子 $\sqrt{2}$ を忘れ、$\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ ではなく $\frac{\pi}{4}$ としてしまう。
- 小問 (ii) で $\frac{1}{x}$ を見失う。これは u になり、$-\frac{1}{u^2}$ と合わさって $-\frac{1}{u}$ が残る。

STEP のその先へ

どちらの手法も、積分の「測度」を変えない区間の対称性を利用している。鏡映 $x \mapsto a - x$ は $\mathrm{d}x$ を保ち、反転 $x \mapsto 1/x$ は $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ を保つ。大学では、これは不変測度（invariant measure）の考え方へと発展する。たとえば、$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ は乗法に関する正の実数全体上の自然な測度であり、メリン変換（Mellin transform）の基礎となっている。置換積分の実解析的な基礎については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門

書）を参照のこと。STEP 風の積分の技法をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。