解答例

STEP II 2010、第 3 問

純粋数学 ・ フィボナッチ数と漸化式

> **STEP II 2010、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q3

鍵となる考え方

与えられた項が 4 つ、未知数も 4 つである。$(*)$ に $n = 0, 1, 2, 3$ を代入して解けばよい。工夫すべき点は、ある式を別の式で割ることである。こうすると a が消え、条件は $\lambda + \mu$ と $\lambda\mu$ についての式になる。これらは対称関数（symmetric functions）であり、λ と μ を二次方程式（quadratic equation）の解として捉えることを可能にする。公式が求まれば、(iii) の和は 2 つの等比級数（geometric series）に分かれる。

解答

小問 (i)

$(*)$ に $n = 0, 1, 2, 3$ を代入すると

$$a + b = 0, \qquad a\lambda + b\mu = 1,$$
$$a\lambda^2 + b\mu^2 = 1, \qquad a\lambda^3 + b\mu^3 = 2.$$

を得る。第 1 式から $b = -a$ であるから、残りの 3 式は

$$a(\lambda - \mu) = 1, \qquad a(\lambda^2 - \mu^2) = 1, \qquad a(\lambda^3 - \mu^3) = 2.$$

となる。特に $a(\lambda - \mu) = 1$ から $a \neq 0$ かつ $\lambda \neq \mu$ がわかる。因数分解すると

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu), \qquad \lambda^3 - \mu^3 = (\lambda - \mu)(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2),$$

であるから、第 2 式と第 3 式を $a(\lambda - \mu) = 1$ で割ると（これは 0 でないので割ってよい）

$$\lambda + \mu = 1 \qquad \text{かつ} \qquad \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 2,$$

を得る。このうち後者が示すべき結果である。

考えてみよう この2つの式から、λ と μ そのものはどのように求められるだろうか。

第2の式を和と積で表すと $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=(\lambda+\mu)^2-\lambda\mu$ であるから、$1-\lambda\mu=2$ より $\lambda\mu=-1$ である。和が1、積が -1 である2数は

$$t^2-t-1=0, \qquad \text{より} \qquad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

の解である。どちらの解が λ だろうか。$a(\lambda-\mu)=1$ と $a>0$ から $\lambda-\mu>0$ でなければならないので、λ は大きい方の解である。このとき $\lambda-\mu=\sqrt{5}$ であり、

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad a=\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad b=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

となる。（逆の割り当てでは $a=-1/\sqrt{5}$ となってしまい、これは条件に反する。）逆に、上の各段階はすべて逆にたどれるので、これらの値は4つの式をすべて満たす。

小問 (ii)

$F_6=(\lambda^6-\mu^6)/\sqrt{5}$ である。$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6$ を直接展開する代わりに、λ が $t^2=t+1$ の解であることを使って次数を下げる。

$$\begin{aligned}
\lambda^2&=\lambda+1,\\
\lambda^3&=\lambda^2+\lambda=2\lambda+1,\\
\lambda^6&=(2\lambda+1)^2=4\lambda^2+4\lambda+1=4(\lambda+1)+4\lambda+1=8\lambda+5.
\end{aligned}$$

μ も同じ二次方程式を満たすので全く同様のことが成り立ち、$\mu^6=8\mu+5$ である。よって

$$F_6=\frac{(8\lambda+5)-(8\mu+5)}{\sqrt{5}}=\frac{8(\lambda-\mu)}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=8.$$

小問 (iii)

$(*)$ を用いると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n-\left(\frac{\mu}{2}\right)^n\right].$$

である。$\lambda\approx1.618$、$\mu\approx-0.618$ であるから、公比（common ratio）$\lambda/2$ と $\mu/2$ はいずれも絶対値（modulus）が1より小さい。したがって2つの等比級数はどちらも収

束（converge）し、和を 2 つの級数の差に分けてよい。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\lambda/2} - \frac{1}{1-\mu/2}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2-\lambda} - \frac{1}{2-\mu}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\lambda-\mu}{(2-\lambda)(2-\mu)} = \frac{1}{4-2(\lambda+\mu)+\lambda\mu},$$

ここで $\lambda - \mu = \sqrt{5}$ を用いた。$\lambda + \mu = 1$ と $\lambda\mu = -1$ より分母は $4-2-1=1$ であるから

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+1}} = 1.$$

検算

この公式からは整数が得られるはずである。$\lambda^4 = 3\lambda + 2$ を用いると $F_4 = (\lambda^4 - \mu^4)/\sqrt{5}$ から $F_4 = 3$ を得る。また $F_5 = 5$、$F_6 = 8$ は、最初の 4 項に見られる規則 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ に合っている。(iii) については、部分和（partial sums）0, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{19}{32}$, ... は少しずつ 1 に近づいていく。最初の 300 項を数値的に足すと、計算機の精度の範囲で 1.0000000 となる。項は $(0.809)^n$ 程度でしか減衰しないので、収束は遅い。

よくある間違い

- どちらの解が λ かを決めるのに $a > 0$ を使い忘れること。これがないと答えは定まらない。
- なぜ 0 でないかを述べずに $\lambda - \mu$ で割ること（$a(\lambda - \mu) = 1$ であるから 0 ではない）。
- 各級数が収束することを確かめずに、無限和を 2 つの級数に分けること。

STEP のその先へ

ここで得た公式はフィボナッチ数（Fibonacci numbers）に対するビネの公式（Binet's formula）であり、その方法は線形漸化式（linear recurrence）に対する一般的な方法である。λ と μ は $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ の特性方程式（characteristic equation）$t^2 = t + 1$ の解である。小問 (iii) は母関数（generating function）$\sum F_n x^n = x/(1 - x - x^2)$ を $x = \frac{1}{2}$ で評価して（それを半分にして）おり、やはり 1 を与える。母関数は大学 1 年次の組合せ論（combinatorics）や確率において重要な道具である。黄金比（golden ratio）λ とフィボナッチ数の連分数（continued fractions）論における役割については、Davenport, *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。