解答例

STEP II 2010、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数の積分法

STEP II 2010、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s2-q2

鍵となる考え方

3 次式（cubic）$7\sin x - 8\sin^3 x$ はそのままでは積分しにくそうに見えるが、これが 3 倍角の公式（triple-angle formula）から組み立てられていること、すなわち $\sin 3x$ の 2 倍に少しの余りを加えたものであることに気づけば話は変わる。さらに余弦の 3 倍角の公式を使えば、答えは $c = \cos\alpha$ の多項式に戻る。Eustace の積分については、$\sin^2\alpha = 1 - c^2$ を用いると彼の（誤った）答えも同じ変数で表せる。両者を比べると c の 4 次方程式（quartic）が得られ、その根については問題文でヒントが与えられている。

解答

3 倍角の公式

加法定理（addition formulae）と $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を用いると、

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x,\end{aligned}$$

となり、求める式が得られる。同様に、$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ を用いると、

$$\begin{aligned}\sin 3x = \sin(2x + x) &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x \\ &= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

小問 (i)

正弦の公式より $8\sin^3 x = 6\sin x - 2\sin 3x$ であるから、

$$7\sin x - 8\sin^3 x = \sin x + 2\sin 3x.$$

これで積分は容易である：

$$\mathrm{I}(\alpha) = \Big[-\cos x - \tfrac{2}{3}\cos 3x \Big]_0^{\alpha} = -\cos\alpha - \tfrac{2}{3}\cos 3\alpha + 1 + \tfrac{2}{3}.$$

余弦の公式より $\cos 3\alpha = 4c^3 - 3c$ であるから、

$$\mathrm{I}(\alpha) = -c - \tfrac{2}{3}(4c^3 - 3c) + \tfrac{5}{3} = -\tfrac{8}{3}c^3 + c + \tfrac{5}{3},$$

となり、これが求める結果である。

$\mathrm{I}(\alpha) = 0$ となる c の値について：$\alpha = 0$ とすれば積分は自明に 0 となるので、$c = 1$ はその条件を満たす（確認：$-\frac{8}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 0$）。実際、これが唯一の値である。なぜなら $8c^3 - 3c - 5 = (c-1)(8c^2 + 8c + 5)$ であり、この 2 次式の判別式（discriminant）は $64 - 160 < 0$ だからである。

小問 (ii)

Eustace の規則によれば $\int \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x$、$\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin^4 x$ となるので、彼の求める定積分（definite integral）の値は

$$\mathrm{E}(\alpha) = \Big[\tfrac{7}{2}\sin^2 x - 2\sin^4 x \Big]_0^{\alpha} = \tfrac{7}{2}s^2 - 2s^4, \qquad s = \sin\alpha.$$

小問 (i) と比較するため、$s^2 = 1 - c^2$ と書くと、

$$\mathrm{E}(\alpha) = \tfrac{7}{2}(1 - c^2) - 2(1 - c^2)^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}c^2 - 2c^4.$$

$\cos\beta = -\frac{1}{6}$ **の場合。** $c = -\frac{1}{6}$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\beta) &= -\tfrac{8}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{216}\right) - \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{81} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{245}{162}, \\ \mathrm{E}(\beta) &= \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{36} - 2\cdot\tfrac{1}{1296} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{648} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{648} = \tfrac{245}{162}.\end{aligned}$$

両者は一致するので、Eustace は偶然にも $\mathrm{I}(\beta)$ の正しい値を得ることになる。

すべての α の値。 Eustace の答えが正しくなるのは、ちょうど $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{I}(\alpha)$ のとき、すなわち（6 を掛けて項を整理すると）

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = 0.$$

のときである。

考えてみよう このような 4 次式を、公式を使わずにどう因数分解（factorise）すればよいだろうか？

根はすでに 2 つわかっている。直前の計算により $c = -\frac{1}{6}$ は条件を満たすので、$6c+1$ は因数である。また $c = 1$（すなわち $\alpha = 0$）も条件を満たすはずである。そこでは I も E も 0 になるからである。$6c+1$ で割ると（c^3 と c の係数を比較して）、

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = (6c+1)(2c^3 - 3c^2 + 1),$$

となり、さらに $c = 1$ はこの 3 次式の根であるから、

$$2c^3 - 3c^2 + 1 = (c-1)(2c^2 - c - 1) = (c-1)^2(2c+1).$$

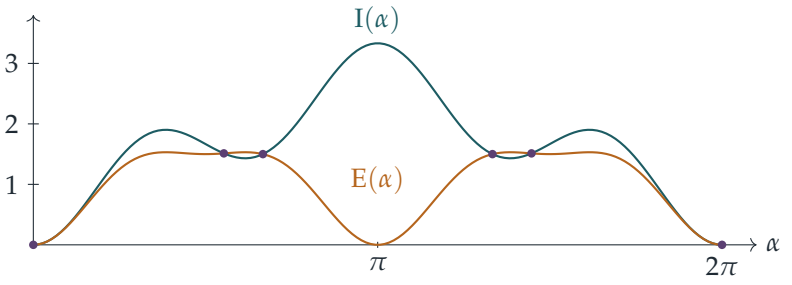
よって条件は

$$(6c+1)(2c+1)(c-1)^2 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad c = 1,\ -\tfrac{1}{2} \text{ または } -\tfrac{1}{6}.$$

となる。$c = \cos\alpha$ であり、$[-1, 1]$ に属するどの c の値もある α から得られるので、Eustace が $\mathrm{I}(\alpha)$ の正しい値を得るのは、ある整数 n に対して

$$\alpha = 2n\pi, \qquad \alpha = 2n\pi \pm \tfrac{2\pi}{3}, \qquad \text{または} \qquad \alpha = 2n\pi \pm \arccos\left(-\tfrac{1}{6}\right).$$

となるときであり、かつそのときに限る。（負の α も含まれる。I も E も $\cos\alpha$ を通してのみ α に依存するからである。）下のグラフは、$0 \le \alpha \le 2\pi$ における真の積分の値（ティール）と Eustace の答え（アンバー）を示している。両者は $\alpha = 0$、$\frac{2\pi}{3}$、$\arccos(-\frac{1}{6}) \approx 1.738$、およびこれらを $\alpha = \pi$ に関して対称に移した点で交わる。



検算

- $\alpha = \pi$（$c = -1$）のとき、公式は $\mathrm{I}(\pi) = \frac{8}{3} - 1 + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ を与え、これは $\int_0^{\pi} (\sin x + 2\sin 3x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{4}{3}$ と一致する。
- もとの被積分関数（integrand）にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると $\mathrm{I}(\beta) \approx 1.5123457$ となり、$\frac{245}{162} = 1.5123456\ldots$ と一致する。また $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ では、積分の値も Eustace の答えもともに 1.5 に等しい。

よくある間違い

- 下端（lower limit）を忘れること：$-\cos 0 - \frac{2}{3}\cos 0 = -\frac{5}{3}$ であり、これが $+\frac{5}{3}$ をもたらす。
- $c = 1$ がこの 4 次方程式の**重根**（double root）であることを見落とす、あるいはこの根自体を忘れて $c = -\frac{1}{2}$ と $c = -\frac{1}{6}$ だけを答えること。
- $[0, \pi]$ に属する α だけを答えること。問題はすべての値を求めている。

STEP のその先へ

$\sin^3 x$ のような累乗を $\sin x$ と $\sin 3x$ の組合せで表すことは、フーリエ解析（Fourier analysis）の出発点である。どの累乗 $\sin^n x$ も $\sin kx$ または $\cos kx$ の有限和であり、それは $\sin x = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/2\mathrm{i}$ を使えば素早く求められる。$\cos nx$ を $\cos x$ で表す多項式はチェビシェフ（Chebyshev）多項式（Chebyshev polynomial）T_n であり、$T_3(c) = 4c^3 - 3c$ である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、ド・モアブル（de Moivre）の定理（de Moivre's theorem）によってこれらの恒等式がすべて自然なものになる理由を示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。