解答例

STEP II 2010、第 13 問

確率・統計 ・ 独立な事象

> **STEP II 2010、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q13

鍵となる考え方

Rosalind が合格するのは、Pardeep との対戦で少なくとも 1 勝し、**かつ** Quentin との対戦でも少なくとも 1 勝するとき、かつそのときに限る。「少なくとも 1 回」は、つねに余事象（complement）を通して考えるのが最も簡単である。n 回の対戦で少なくとも 1 勝する確率は、1 から全敗する確率を引いたものである。各対戦が独立（independent）であれば、各戦略の成功確率はこのような因子 2 つの積となり、戦略どうしの比較は差の因数分解に帰着する。負ける確率を $a = 1 - p$、$b = 1 - q$ とおくと、計算が見通しよくなる。

解答

異なる対戦の結果は独立であり、Pardeep（または Quentin）との各対戦には、それまでの結果にかかわらず確率 p（または q）で勝つと仮定する。対戦の順序は関係ない。合格が決まった時点で対戦を打ち切るかどうかにかかわらず、合格となる結果はまったく同じだからである。

Rosalind が Pardeep と m 回、Quentin と n 回対戦するとき、Pardeep との対戦で少なくとも 1 勝する事象を A、Quentin との対戦で少なくとも 1 勝する事象を B とする。A が起こらないのは m 回すべてに負けるときに限るので $\mathrm{P}(A) = 1 - (1-p)^m$ であり、同様に $\mathrm{P}(B) = 1 - (1-q)^n$ である。2 つの事象は異なる対戦にかかわるので独立であり、

$$\mathrm{P}(\text{合格}) = (1 - (1-p)^m)(1 - (1-q)^n).$$

以下つねに $a = 1 - p$、$b = 1 - q$ とおく。$0 < p < q < 1$ より $0 < b < a < 1$ である。

小問 (i)

Pardeep と 2 回、Quentin と 1 回対戦する場合の成功確率は $(1-a^2)(1-b)$ であり、Quentin と 2 回、Pardeep と 1 回対戦する場合は $(1-a)(1-b^2)$ である。それぞれの平方の差を因数分解すると、

$$\begin{aligned}(1-a^2)(1-b)-(1-a)(1-b^2) &= (1-a)(1-b)[(1+a)-(1+b)]\\ &= (1-a)(1-b)(a-b)\\ &= pq(q-p).\end{aligned}$$

$p, q > 0$ かつ $q > p$ なので、これは正である。したがって、Pardeep と 2 回対戦するほうが合格の確率が大きく、彼女はそちらを選ぶべきである。

小問 (ii)

3 つの戦略の成功確率は

$$S_1 = (1-a^3)(1-b), \qquad S_2 = (1-a^2)(1-b^2), \qquad S_3 = (1-a)(1-b^3).$$

$1-x^k = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})$ であるから、いずれも因子 $(1-a)(1-b) = pq$ を含む。

戦略 1 はつねに戦略 3 より優れている。実際、

$$\begin{aligned}S_1 - S_3 &= pq[(1+a+a^2)-(1+b+b^2)]\\ &= pq\,(a-b)(1+a+b) > 0,\end{aligned}$$

であり、これは $a > b$ による。よって戦略 3 が最善となることはなく、戦略 1 と戦略 2 だけを比較すればよい。

戦略 1 と戦略 2 の比較。

$$S_1 - S_2 = pq[(1+a+a^2)-(1+a)(1+b)] = pq[a^2 - b(1+a)].$$

p と q に戻すと、

$$S_1 - S_2 = pq\,D, \qquad \text{ただし} \qquad D = (1-p)^2 - (1-q)(2-p).$$

$pq > 0$ なので、戦略 1 が戦略 2 より優れているのは $D > 0$ のとき、かつそのときに限る。

考えてみよう 条件 $q - p > \frac{1}{2}$ は、D を正にするのにどのように役立つか？

D のうち q を含む項は $-(1-q)(2-p)$ だけであり、$2-p>0$ なので、この項は q が増加すると増加する。そこで q を、条件が許す最小の値で置き換える。$q-p>\frac{1}{2}$ ならば $1-q<\frac{1}{2}-p$ であり、$2-p>0$ なので

$$(1-q)(2-p)<(\tfrac{1}{2}-p)(2-p)=1-\tfrac{5}{2}p+p^2.$$

したがって

$$D>(1-2p+p^2)-(1-\tfrac{5}{2}p+p^2)=\tfrac{1}{2}p>0.$$

よって $S_1>S_2$ であり、$S_1>S_3$ と合わせて、$q-p>\frac{1}{2}$ のとき Rosalind は戦略 1 を選ぶべきであることが示された。

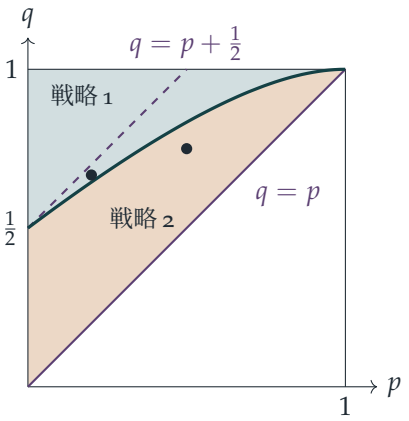
$q-p<\frac{1}{2}$ **のときは、どちらも勝ちうる。**例を 2 つ挙げる。

- $p=\frac{1}{2}$、$q=\frac{3}{4}$（したがって $q-p=\frac{1}{4}$）。このとき $D=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{8}<0$ である。実際 $S_1=\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{42}{64}$、$S_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}=\frac{45}{64}$ なので、**戦略 2 のほうが優れている**。
- $p=\frac{1}{5}$、$q=\frac{2}{3}$（したがって $q-p=\frac{7}{15}<\frac{1}{2}$）。このとき $D=\frac{16}{25}-\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5}=\frac{16}{25}-\frac{15}{25}=\frac{1}{25}>0$ である。実際 $S_1=\frac{61}{125}\cdot\frac{2}{3}=\frac{122}{375}$、$S_2=\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{9}=\frac{120}{375}$ なので、**戦略 1 のほうが優れている**。

全体像は (p,q) 平面で見ると明らかである。$D=0$ とおくと境界曲線 $q=1-\dfrac{(1-p)^2}{2-p}$ が得られる。

$$(p+\tfrac{1}{2})-\left(1-\frac{(1-p)^2}{2-p}\right)=\frac{p}{2(2-p)}>0,$$

が確かめられるので、この曲線は直線 $q=p+\frac{1}{2}$ のすぐ下にある。曲線より上では戦略 1 が最善であり、曲線と対角線 $q=p$ の間では戦略 2 が最善である。



2 つの点は上の例である。$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ は戦略 2 の領域にあり、$(\frac{1}{5},\frac{2}{3})$ は曲線のすぐ上にある。

検算

小問 (i) で $q \to 1$ とする。Quentin には確実に勝つので、Pardeep との対戦だけが問題となり、その回数が多いほうが明らかに有利である。これは差 $pq(q-p) \to p(1-p) > 0$ と一致する。小問 (ii) については、$p < q$ を満たすランダムな 2000 組について 2^4 通りの結果すべてを分数で厳密に数え上げ、S_1, S_2, S_3 の式と因数分解を確認した。$p = \frac{1}{2}$、$q = \frac{3}{4}$ でのシミュレーションでは $S_1 \approx 0.657$、$S_2 \approx 0.703$ となり、厳密値 $\frac{21}{32} = 0.65625$ および $\frac{45}{64} \approx 0.7031$ とよく合う。

よくある間違い

- 「少なくとも 1 勝」の確率を $1-(1-p)^m$ ではなく mp と計算してしまう。重なりのある事象の確率を足すと、数えすぎになる。
- 戦略 3 を忘れる。戦略 1 が最善であることを示すには、**両方の**代替案に勝つことを示さなければならない。
- $q - p < \frac{1}{2}$ の例を挙げながら、条件 $0 < p < q < 1$ を確認しない。

STEP のその先へ

直観的には「自分が最も弱いところに労力をかけよ」となるが、後半の小問はそれがつねに正しいとは限らないことを示している。Pardeep との追加の対戦には収穫逓減（diminishing returns）があり、p がそれほど小さくないときには、Quentin との 2 回目の対戦のほうが価値が大きいのである。決まった回数の試行を割り振って「少なくとも 1 回成功する」確率の積を最大化する問題は、信頼性理論（reliability theory）や実験計画法（design of experiments）の背後にある最適化問題の小さな例である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は独立性と余事象を丁寧に扱っており、この種の問題を数多く収録している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。