解答例

STEP II 2010、第 11 問

力学 ・ 3 力のつり合い

> **STEP II 2010、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q11

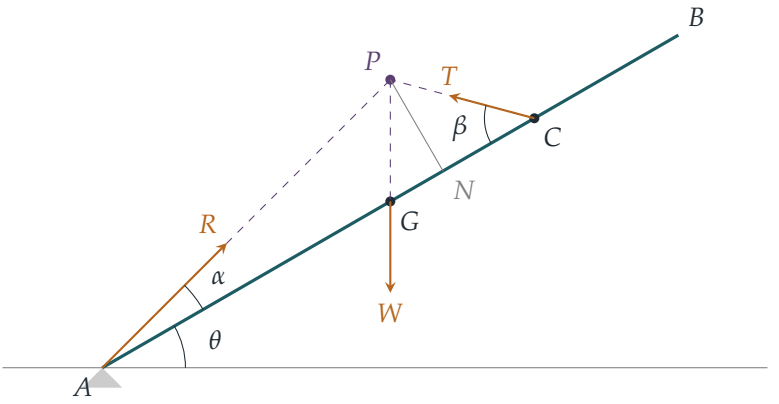
鍵となる考え方

棒にはたらく力は、重力、A における抗力（reaction）、C における張力（tension）の 3 つだけである。互いに平行でない 3 つの力が物体を釣り合い（equilibrium）の状態に保っているとき、それらの作用線（line of action）は 1 点で交わらなければならない。したがって、A からの抗力の作用線、C からの糸の作用線、そして棒の中点を通る鉛直線はすべて 1 点で交わる。この共通の点から、棒に沿った方向と棒に垂直な方向に距離を測れば、問題全体はちょっとした直角三角形の三角比の問題になり、力そのものを求める必要はなくなる。

解答

モデルと図

棒を一様な剛体の棒（uniform rigid rod）としてモデル化する。したがって重さ W は中点 G にはたらき、$AG = 2L$ である。糸は軽いので、$AC = 3L$ である点 C において、糸自身の方向に棒を引く。支点は A において単一の力 R を及ぼす（支点がなめらかか粗いかは与えられていないが、それを知る必要はない）。図は $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ の場合を正確な縮尺で描いたものである。



公式を示す

重力は G を通って鉛直にはたらく。糸の作用線は C を通り、抗力の作用線は A を通る。これら 3 本の直線は平行ではないので、3 本とも 1 点を通る。その点を P とする。

考えてみよう なぜ 3 本の作用線は 1 点で交わらなければならないのだろうか。

R と T の作用線が P で交わるとする。P のまわりのモーメント（moment）を考えると、R と T のモーメントはどちらも 0 である。よって棒が回転について釣り合うためには、重力の P のまわりのモーメントも 0 でなければならない。これは、G を通る鉛直線もまた P を通ることを意味する。

P から棒に下ろした垂線の足を N とし、$h = PN$ とおく。直角三角形 PNA において A における角は α であるから、$AN = h\cot\alpha$ である。直角三角形 PNC において C における角は β であるから、$NC = h\cot\beta$ である。$AN + NC = AC$ であるから、

$$h\cot\alpha + h\cot\beta = 3L. \tag{1}$$

（α または β が鈍角の場合、N は A または C の外側にあるが、符号付きの長さ $h\cot\alpha$ と $h\cot\beta$ の和はやはり AC に等しいので、(1) はどの場合にも成り立つ。）

次に 3 本目の作用線を用いる。棒は水平と角 θ をなすので、垂線 PN は鉛直線 PG と角 θ をなす。直角三角形 PNG において P における角は θ であるから $GN = h\tan\theta$ であり、図のように N は G より上側（A から遠い側）にある。したがって

$$h\cot\alpha = AN = AG + GN = 2L + h\tan\theta. \tag{2}$$

(1) から (2) を引くと $h\cot\beta = L - h\tan\theta$、すなわち

$$L = h(\cot\beta + \tan\theta).$$

この L の値を (2) に代入すると

$$h\cot\alpha = 2h(\cot\beta + \tan\theta) + h\tan\theta = h(3\tan\theta + 2\cot\beta).$$

$h \neq 0$ である（そうでなければ P は棒上の G に一致し、C に取り付けられた糸は棒に沿うことになるので、A のまわりの重力のモーメントと釣り合うことができない）から、h で割ってよく、

$$\cot\alpha = 3\tan\theta + 2\cot\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。

$\theta = 30°$、$\beta = 45°$ の場合

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$、$\cot 45° = 1$ であるから、

$$\cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} + 2 = 2 + \sqrt{3}.$$

ここで $\cot 15°$ が必要になる。$A = 45°$、$B = 30°$ として $\tan(A - B)$ の公式を用いると、

$$\tan 15° = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

よって

$$\cot 15° = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

したがって $\cot\alpha = \cot 15°$ である。角 α は $0°$ と $180°$ の間にあり、cot はこの区間で狭義単調減少（strictly decreasing）であるから、各値をちょうど 1 回ずつとる。ゆえに $\alpha = 15°$ である。

検算

- **別の方法による確認。** A のまわりのモーメントを考えると $T \cdot 3L\sin\beta = W \cdot 2L\cos\theta$ が得られる。次に棒に沿った方向と棒に垂直な方向に力を分解すると R の成分が得られ、$\cot\alpha$ はそれらの比である。こうして同じ公式が再現される。この方法で 10^5 組の無作為な (θ, β) について数値的に確認したところ、約 10^{-15} の精度で一致した。
- **特別な値。** $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ のとき、数値的に求めた釣り合いから $\alpha = 15.000°$ が得られ、$\cot 15° = 3.7320\ldots = 2 + \sqrt{3}$ である。図は正確な縮尺で描かれており、P は G の真上、A から高さ $\sqrt{3}L$ の位置にある。
- **極限の場合。** $\theta \to 0$ かつ $\beta = 90°$（水平な棒と鉛直な糸）のとき、公式から $\cot\alpha = 0$、よって $\alpha = 90°$ となる。つまり抗力も鉛直になる。ほかの力がすべて鉛直なのだから、当然そうでなければならない。

よくある間違い

- 重力を C にはたらかせたり、$AG = 3L/2$ としたりすること。重力は棒全体の中点、つまり A から $2L$ の位置にはたらく。
- GN の符号を誤ること。棒は A から上向きに傾いているので、G を通る鉛直線は P からの垂線と G に関して A と反対側で交わる。よって $AN = 2L + h\tan\theta$ であり、$2L - h\tan\theta$ ではない。
- $\cot\alpha = 2 + \sqrt{3}$ で止めてしまい、これが $\cot 15^\circ$ であることを示さず、またそれによって α が一意に定まる理由も述べないこと。

STEP のその先へ

三力の定理（three-force theorem）は、静力学（statics）におけるより一般的な事実の特別な場合である。剛体にはたらく任意の力の系は、選んだ 1 点を通る単一の力と 1 つの偶力（couple）に帰着でき、釣り合いとはその両方が 0 になることである。大学ではこれは、力の総和と全モーメント $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ がともに消えるというベクトルの条件になり、さらに剛体の力学（rigid-body dynamics）の基礎となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、トルク（torque）と釣り合いをこのベクトルの言葉で展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。