解答例

STEP II 2010、第 10 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP II 2010、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 10.2 節「**重ねたボールの効果**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/stacked-balls.html

鍵となる考え方

すべては一つの衝突、すなわち静止している粒子に別の粒子が弾性衝突（elastic collision）する場面に帰着する。運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの実験則（Newton's experimental law）（$e = 1$ の場合）から、受け渡される速さが求まり、それは質量の比だけで決まる。小問 (ii) ではどの衝突でも質量比が同じ λ であるから、各衝突で速さは同じ倍率で掛けられ、あとは等比数列（geometric progression）が片づけてくれる。

解答

粒子を、なめらかな台の上の一直線上を運動する質点（point mass）とみなし、速度はすべて B の最初の運動の向きを正として測る。

小問 (i)

衝突直後の B と A の速度をそれぞれ v_B、v_A とする。運動量保存則より

$$bmu = bm\,v_B + m\,v_A,$$

であり、衝突は完全弾性（$e = 1$）であるから、ニュートンの実験則より遠ざかる速さは近づく速さに等しい：

$$v_A - v_B = u.$$

$v_B = v_A - u$ を運動量の式に代入して m で割ると

$$bu = b(v_A - u) + v_A \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{2bu}{b+1}.$$

よって A の速さは $\dfrac{2b}{b+1}\,u$ である。

この式は質量の比 b しか用いておらず、導出は任意の $b > 0$ に対して成り立つ。$b + 1 > b$ かつ $u > 0$ であるから、b の値によらず

$$v_A = 2u \cdot \frac{b}{b+1} < 2u,$$

となる。したがって A を B の初速の 2 倍の速さで動かすことは決してできない。ただし b を大きくとれば、いくらでも $2u$ に近づけることができる。

小問 (ii)

直線上に並ぶ順に、質量は

$$B_1 : \lambda^n m, \quad B_2 : \lambda^{n-1} m, \quad \ldots, \quad B_n : \lambda m, \quad A : m.$$

である。各粒子は、その次の粒子の λ 倍の重さである。したがって、速さ v で動く粒子が次の（静止している）粒子に衝突するたびに、$b = \lambda$ として小問 (i) が適用でき、衝突された粒子は速さ kv で動き出す。ここで

$$k = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}.$$

である。小問 (i) の式 $v_B = v_A - u$ より、衝突した側の粒子は速さ

$$kv - v = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\,v,$$

で前方へ進み続ける。$\lambda > 1$ であるから、これは正である。

こうして B_1 は B_2 に速さ ku を与え、次に B_2 は B_3 に速さ k^2u を与え、以下同様に続き、最後に速さ $k^{n-1}u$ で動く B_n が A に速さ

$$v_A = k^n u = \left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1}\right)^n u.$$

を与える。

考えてみよう ある B_i が速さを受け渡したあと、前方の粒子に追いついて、さらに衝突が起こることはあり得ないだろうか？

n 回の衝突がすべて終わったとき、$i = 1, \dots, n$ に対して B_i は速さ $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1} k^{i-1} u$ で前方へ進み、A は速さ $k^n u$ で進む。$\lambda > 1$ より $k > 1$ である（$2\lambda > \lambda + 1$ だから）。よってこれらの速さは直線に沿って狭義単調に増加する。すなわち各粒子は後ろの粒子より速く動き、互いに離れていく。したがってそれ以上の衝突は起こらず、A の最終的な速さは $k^n u$ である。

$k > 1$ であるから、$n \to \infty$ のとき $k^n \to \infty$ である。よって任意の目標の速さ V に対し、$k^n u > V$ となるほど n を大きくとれば、A を V より速く動かせる。つまり A の速さに上限はない。

$\lambda = 4$ の場合

このとき $k = \frac{8}{5}$ であり、$\left(\frac{8}{5}\right)^n > 20$ を満たす最小の n を求めればよい。底 10 の対数（logarithm）をとると（対数は増加関数なので不等号の向きは保たれる）

$$n \log_{10} \tfrac{8}{5} > \log_{10} 20.$$

$\frac{8}{5} = \frac{2^4}{10}$、$20 = 2 \times 10$ と書けば

$$\log_{10} \tfrac{8}{5} = 4 \log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412,$$
$$\log_{10} 20 = \log_{10} 2 + 1 \approx 1.30103.$$

$\log_{10} \frac{8}{5} > 0$ であるから、これで割ってよく、

$$n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37.$$

を得る。これを満たす最小の整数は $n = 7$ である。（余裕は十分にある。6.37 は整数から遠いので、$\log_{10} 2$ の近似によって答えが変わることはない。）

検算

- 小問 (i) で $b = 1$ とすると $v_A = u$、$v_B = 0$ となる。等しい質量の粒子は速度を入れ替えるはずであり、そのとおりになっている。また $b \to \infty$ のとき $v_A \to 2u$ である。
- 運動エネルギー（kinetic energy）：$v_A = \frac{2b}{b+1} u$、$v_B = \frac{b-1}{b+1} u$ とすると $b v_B^2 + v_A^2 = \frac{b(b-1)^2 + 4b^2}{(b+1)^2} u^2 = b u^2$ となり、エネルギーは保存されている。
- 直接計算すると $1.6^6 \approx 16.78 < 20$、$1.6^7 \approx 26.84 > 20$ であり、$n = 7$ が確かめられる。また、厳密な分数を用いて粒子の列を一段ずつシミュレーションしたところ、ちょうど n 回の衝突のあとで A の速さがちょうど $k^n u$ となった。

よくある間違い

- 質量の大小を逆にしてしまう：B_1 が**最も重く**（$\lambda^n m$）、B_n が B たちの中で最も軽く（λm）、A はさらに軽い。
- 衝突の回数を n ではなく $n-1$ と数えてしまう：速さは $B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n \to A$ と受け渡されるので、n 段階である。
- その後の衝突が起こらないことの確認を忘れる、あるいは最小の整数 $n = 7$ ではなく整数でない 6.37 を答えてしまう。

STEP のその先へ

1 回の弾性衝突では速さはせいぜい 2 倍にしかならないが、衝突を連鎖させればそのような上限はない。これは「積み重ねたボール」の実演の背後にある考え方である。重いボールの上に軽いボールを載せて落とすと、軽いボールは落とした高さよりはるかに高く跳ね上がる。運動量とエネルギーによって衝突を解析すること（さらにすっきりと扱うには、弾性衝突が各速度を単に反転させるだけになる重心系（centre-of-mass frame）で考えること）は、大学 1 年次の力学の中心的なテーマである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がこれを詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。