解答例

# STEP II 2010、第 1 問

純粋数学 ・ 曲率と曲率円

> **STEP II 2010、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q1

## 鍵となる考え方

「接する（touch）」とは、円と曲線が点 $P$ を共有し、そこでの傾き（gradient）も一致することを意味する。「傾きの変化率」とは $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ のことである。したがって、$P$ において $y$、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ がすべて曲線のものと一致する円を求めればよい。一般の円の方程式を陰関数微分（implicit differentiation）で 2 回微分すると、この条件は中心についての簡単な方程式になる。

## 解答

### $P$ における曲線

$y = 1 - x + \tan x$ に対して、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 + \sec^2 x = \tan^2 x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\tan x \sec^2 x.$$

$x = \frac{1}{4}\pi$ では $\tan x = 1$、$\sec^2 x = 2$ であるから、

$$y = 2 - \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 4.$$

よって $P = (\frac{1}{4}\pi,\, 2 - \frac{1}{4}\pi)$ である。

### 円

円を $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ とおく。$x$ について陰関数微分すると、

$$(x-a) + (y-b)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

さらにもう一度微分すると（第 2 項には積の微分法則（product rule）を用いる）、

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(y-b)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

**考えてみよう** なぜ曲線の値をそのまま円の方程式に代入してよいのだろうか。

この 2 つの方程式は円上のすべての点で成り立ち、そこでの $y$、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ は円自身の値である。2 つの条件は、円が $P$ を通り、$P$ において $C$ と同じ傾きと同じ二階導関数（second derivative）をもつことを述べている。したがって $P$ においては、$x=\frac{1}{4}\pi$、$y=2-\frac{1}{4}\pi$、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1$、$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=4$ を用いてよい。

2 番目の方程式から

$$1+1+4(y-b)=0 \quad\Longrightarrow\quad y-b=-\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad b=2-\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi.$$

次に 1 番目の方程式から

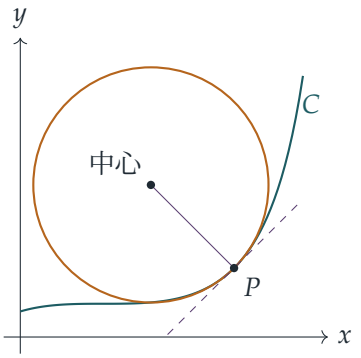
$$x-a=-(y-b)\cdot 1=\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad a=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}.$$

最後に、$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ である。よって接触円（osculating circle）は

$$\text{中心}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi\right) \quad \text{、半径} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

である。

これは幾何的にも納得がいく。中心は、傾き 1 の接線（tangent）に垂直な方向 $(-1,1)$ に沿って $P$ から距離 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の位置にある。また中心は $y>2-\frac{1}{4}\pi$ の側、すなわち曲線の上側にある。$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2>0$ であり、そこで曲線は下に凸（concave upwards）なので、これは正しい。



## 検算

- 曲率半径（radius of curvature）の一般公式 $\rho = \left(1 + y'^2\right)^{3/2} / |y''|$ からは $2^{3/2}/4 = 1/\sqrt{2}$ が得られ、求めた値と一致する。
- 数値的には、中心はおよそ $(0.2854,\ 1.7146)$、$P$ はおよそ $(0.7854,\ 1.2146)$ であり、その距離は 0.70711 である。円の下半分 $y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$ をとり、$x = 0.7854$ で数値微分すると、傾きは 1.0000、二階導関数は 4.000 となり、曲線のものと一致する。

## よくある間違い

- 中心を接線の反対側に置いてしまうこと。$y - b$ の符号は 2 番目の方程式によって決まるので、計算に判断を任せればよい。
- $(y-b)\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の微分に積の微分法則が必要であることを忘れること。$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ の項はそこから生じる。

## STEP のその先へ

接触円の半径は曲率半径であり、その逆数 $\kappa = |y''|/(1+y'^2)^{3/2}$ は曲率（curvature）である。曲率は曲線の微分幾何学（differential geometry）における中心的な量である。空間内の曲線では、曲率は捩率（torsion）とともにフレネ–セレの公式（Frenet–Serret formulae）に現れ、この公式は曲線がどのように曲がり、ねじれるかを記述する。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の STEP の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。