解答例

STEP I 2010、第 9 問

力学 ・ 摩擦とつり合い

> **STEP I 2010、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q9

鍵となる考え方

床に接する角の位置を定め、そこから互いに垂直な 2 辺に沿って重心（centre of mass）まで進めば、壁からの距離が得られる。釣り合い（equilibrium）については、「両方の接点で摩擦が限界に達している」という条件により、各摩擦力（friction）はそれぞれの垂直抗力（normal reaction）の μ 倍に定まる。したがって、2 方向の力のつり合いの式から、両方の垂直抗力が重さを用いて表せる。あとはモーメント（moment）の式を 1 つ立てれば片がつき、$\mu = \tan\lambda$ とおくと計算は加法定理（compound-angle formulae）に帰着する。

解答

モデル

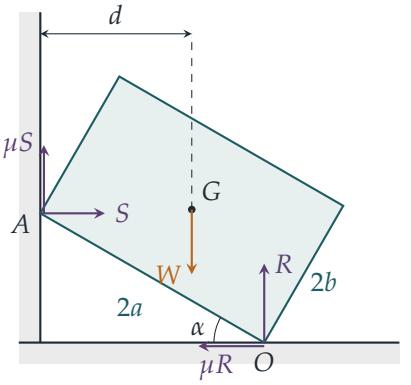
薄板（lamina）は重さ W の一様な長方形の剛体（rigid body）であるから、その重心 G は長方形の中心である。床に接する角を O、壁に接する角を A とする。すると OA は長さ $2a$ の辺で床と角 α をなし、O から出る長さ $2b$ の辺は壁から離れる向きに上方へ伸びている。働く力は次のとおりである。

- O において：上向きの垂直抗力 R と水平方向の摩擦力 F。
- A において：壁から離れる水平方向の垂直抗力 S と鉛直方向の摩擦力 P。
- G において下向きに働く重さ W。

薄板は、O が壁から離れる向きに、A が壁に沿って下向きに滑り出す直前の状態にあるので、摩擦力はこれを妨げる向きに働く。すなわち F は壁に向かう向き、P は上向

きである。両方の接点で摩擦が限界摩擦（limiting friction）に達しているから、

$$F = \mu R, \qquad P = \mu S.$$



重心と壁の距離

OA は長さ $2a$ で水平と角 α をなすから、O と壁との水平距離は $2a\cos\alpha$ である。

O から出る 2 辺のそれぞれに沿って半分ずつ進めば、O から G に到達する。OA に沿って（壁の方へ）a 進むと、壁に向かって $a\cos\alpha$ だけ近づく。長さ $2b$ の辺は OA に垂直なので、水平と角 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ をなし、壁から離れる向きに傾いている。この辺に沿って b 進むと、壁から $b\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = b\sin\alpha$ だけ遠ざかる。よって G と壁の距離は

$$d = 2a\cos\alpha - a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\alpha + b\sin\alpha,$$

となり、示すべき式が得られた。同様にして、G の床からの高さは $a\sin\alpha + b\cos\alpha$、$A$ の床からの高さは $2a\sin\alpha$ である。

釣り合いの条件

水平方向と鉛直方向の力のつり合いより、

$$S = \mu R,$$
$$R + \mu S = W.$$

第 1 式を第 2 式に代入すると $R(1+\mu^2) = W$ となるから、

$$R = \frac{W}{1+\mu^2}, \qquad S = \frac{\mu W}{1+\mu^2}.$$

次に O のまわりのモーメントを考えると、R と μR は消える。水平方向に見て G は O より $2a\cos\alpha - d = a\cos\alpha - b\sin\alpha$ だけ壁に近いので、重さのモーメントは

$W(a\cos\alpha - b\sin\alpha)$ であり、薄板を壁の方へ回転させようとする。A では、力 S は O から高さ $2a\sin\alpha$ の直線に沿って働き、μS は O から水平距離 $2a\cos\alpha$ にある壁に沿って働く。これらはいずれも薄板を壁から離れる向きに回転させようとする。したがって

$$W(a\cos\alpha - b\sin\alpha) = S\cdot 2a\sin\alpha + \mu S\cdot 2a\cos\alpha = \frac{2a\mu W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{1+\mu^2}. \qquad (*)$$

考えてみよう $\mu = \tan\lambda$ とおくと、右辺はどのように整理されるか？

$\mu = \tan\lambda$ とすると $1+\mu^2 = \sec^2\lambda$ であるから、

$$\frac{\mu}{1+\mu^2} = \tan\lambda\cos^2\lambda = \sin\lambda\cos\lambda,$$

$$\sin\alpha + \mu\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}.$$

よって $(*)$ の右辺は $2aW\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda)$ となる。W で割り、$P = \alpha+\lambda$、$Q = \lambda$ として $2\sin P\sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$ を用いると、

$$\begin{aligned} b\sin\alpha &= a\cos\alpha - 2a\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda) \\ &= a\cos\alpha - a\big(\cos\alpha - \cos(\alpha+2\lambda)\big) \\ &= a\cos(2\lambda+\alpha), \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られた。

正方形の薄板

薄板が正方形ならば $b = a$ であり、$a \neq 0$ で割ると

$$\cos(2\lambda+\alpha) = \sin\alpha = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\right).$$

よって、ある整数 k に対して $2\lambda+\alpha = \pm\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) + 2k\pi$ である。正しい場合を選び出す必要がある。ここで $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$（薄板は傾いている）であり、$\mu > 0$ より $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$0 < 2\lambda+\alpha < \frac{3}{2}\pi$ となる。

- 符号が $+$ のとき $2\lambda+\alpha = \frac{1}{2}\pi - \alpha + 2k\pi$ である。$\frac{1}{2}\pi - \alpha$ は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属するので、$(0, \frac{3}{2}\pi)$ に入るのは $k = 0$ の場合だけであり、$\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$ を得る。
- 符号が $-$ のとき $2\lambda = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$、すなわち $\lambda = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$ であり、このような値で $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属するものはない。

したがって $\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$ であり、示すべき式が得られた。（特に、このような限界状態での釣り合いには $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ が必要であり、これは G が O より壁側にある、すなわち $a\cos\alpha > a\sin\alpha$ という条件と一致する。）

検算

- $\mu = 0$（$\lambda = 0$）のとき、条件は $a\cos\alpha = b\sin\alpha$ となる。これは G が O の真上にあることを意味し、まさに壁の助けなしに薄板が角の上で釣り合うことのできる場合である。
- $\alpha = 15°$ の正方形では、結果より $\lambda = 30°$、すなわち $\mu = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$ となる。$(*)$ に $a = b = 1$、$\alpha = \frac{\pi}{12}$、$\mu = 1/\sqrt{3}$ を代入すると、両辺はともに $W(\cos 15° - \sin 15°) \approx 0.707W$ に等しい。
- 数値的に、2000 個のランダムな長方形と角度について、力とモーメントの式から二分法（bisection）で μ を求め、$a\cos(2\lambda + \alpha) = b\sin\alpha$ が 10^{-14} の精度で成り立つことを確認した。

よくある間違い

- 摩擦力の向きを誤る。まず各接点がどちらへ滑ろうとするかを決め、それを妨げる向きにとること。
- 壁からの距離 $a\cos\alpha + b\sin\alpha$ を、O のまわりのモーメントの腕の長さとして使ってしまう。O のまわりの腕の長さは $a\cos\alpha - b\sin\alpha$ である。
- $\lambda = \frac{3}{4}\pi$ も三角方程式の解であることを見落とす。$\mu > 0$ より $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$ となるため、この解は除外される。

STEP のその先へ

$\tan\lambda = \mu$ を満たす角 λ は**摩擦角**（angle of friction）とよばれる。限界摩擦の状態では、接触力の合力は法線と角 λ をなす。別の簡潔な解法として、3 力を受けて釣り合っている剛体では、それらの力の作用線が 1 点で交わる（共点（concurrent）である）必要があるという事実を用いるものがある。2 つの接触力の合力と重さが 1 点で交わらなければならないので、問題は純粋な幾何の問題になる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ニュートン力学の他の分野と並行して、剛体の静力学と摩擦を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。