解答例

STEP I 2010、第 8 問

純粋数学 ・ 無限降下法

> **STEP I 2010、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q8

鍵となる考え方

両小問とも、**無限降下法**（infinite descent）と呼ばれる同じ技法を用いる。まず方程式を素数（prime）を法として（modulo）考える（小問 (i) では 3、小問 (ii) では 5）。すると、その素数がすべての未知数を割り切らなければならないことがわかる。その素数で割ると、**まったく同じ方程式**のより小さな解が得られる。しかし、0 でない整数を 3（あるいは 5）でいつまでも割り続けることはできない。実質的な作業は、どの剰余（residue）が起こりうるかを見抜くことだけであり、小問 (ii) では 4 乗数（fourth power）の一の位がその役割を果たしてくれる。

解答

小問 (i)

移項すると

$$a^3 = 9c^3 - 3b^3 = 3(3c^3 - b^3),$$

となるので、a^3 は 3 で割り切れる。3 は素数なので、積 $a \cdot a \cdot a$ を割り切るならば、いずれかの因数を割り切る。よって $3 \mid a$ である。

a_1 を整数として $a = 3a_1$ とおく。代入して 3 で割ると

$$27a_1^3 + 3b^3 = 9c^3 \quad \Longrightarrow \quad 9a_1^3 + b^3 = 3c^3,$$

となるので、$b^3 = 3(c^3 - 3a_1^3)$ は 3 で割り切れ、先ほどと同様に $3 \mid b$ である。$b = 3b_1$ とおくと

$$9a_1^3 + 27b_1^3 = 3c^3 \quad \Longrightarrow \quad c^3 = 3(a_1^3 + 3b_1^3),$$

となるので、$3 \mid c$ でもある。以上より、a、b、c はすべて 3 で割り切れる。

さらに $c = 3c_1$ とおく。最後の等式は $27c_1^3 = 3a_1^3 + 9b_1^3$ となる。すなわち

$$a_1^3 + 3b_1^3 = 9c_1^3.$$

考えてみよう 3 がすべてを割り切ることを示した。なぜそれによって、すべてがゼロでなければならないことになるのだろうか。

それは、$(a_1, b_1, c_1) = (a/3, b/3, c/3)$ が再びもとの方程式の整数解になっているので、いま証明したことがすべてこの解にも当てはまるからである。すなわち a_1、b_1、c_1 は 3 で割り切れ、言い換えれば a、b、c は 9 で割り切れる。この議論を k 回繰り返すと、すべての $k \geq 1$ に対して 3^k が a、b、c のそれぞれを割り切ることがわかる。しかし、0 でない整数 n は、$3^k > |n|$ となれば 3^k で割り切れない。したがって $a = b = c = 0$ であり、これは明らかに解であるから、これが唯一の解である。

（同値な言い方：$(0,0,0)$ 以外の解が存在するとすれば、そのうち $|a| + |b| + |c|$ が正でかつ最小となるものを選ぶ。すると $(a/3, b/3, c/3)$ は、この値がより小さい正の値となる解であり、矛盾である。）

小問 (ii)

$p^4 = |p|^4$ であるから、p^4 の一の位は $|p|$ の一の位だけで決まる。

n の一の位	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^4 の一の位	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

（たとえば $2^4 = 16$、$3^4 = 81$、$7^4 = 2401$ である。）よって 4 乗数の一の位は 0、1、5、6 のいずれかであり、一の位が 0 または 5 となるのは $5 \mid n$ のときに限る。

次に、各項の一の位を調べる。

- $5r^4$ は 5 の倍数なので、一の位は 0 または 5 である。
- $2q^4$ の一の位は 0（q^4 の一の位が 0 または 5 のとき）または 2（q^4 の一の位が 1 または 6 のとき）である。
- p^4 の一の位は 0、1、5、6 のいずれかである。

$\{0,1,5,6\}$ に属する一の位と $\{0,2\}$ に属する一の位を足すと、一の位は $0,1,5,6,2,3,7,8$ のいずれかになる。0 または 5 になるのは $0+0$ と $5+0$ の場合だけである。よって $2q^4$ の一の位は 0 であり、これは q^4 の一の位が 0 または 5、すなわち $5 \mid q$ であることを意味する。また p^4 の一の位は 0 または 5、すなわち $5 \mid p$ である。以上より、p と q は 5 で割り切れる。

（別解：フェルマー（Fermat）の小定理（Fermat's little theorem）より、$5 \nmid n$ のとき $n^4 \equiv 1 \pmod 5$ であるから、$p^4 + 2q^4$ は 5 を法として $0+0$、$1+0$、$0+2$、$1+2$ のいずれかと合同（congruent）であり、0 となるのは最初のものだけである。）

$p = 5p_1$、$q = 5q_1$ とおく。すると

$$625\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) = 5r^4 \quad \Longrightarrow \quad r^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right),$$

となるので $5 \mid r^4$ であり、5 は素数であるから $5 \mid r$ である。$r = 5r_1$ とおくと

$$625r_1^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) \quad \Longrightarrow \quad p_1^4 + 2q_1^4 = 5r_1^4.$$

よって $(p/5, q/5, r/5)$ は再び同じ方程式の整数解である。

小問 (i) とまったく同様に、これを繰り返すと、すべての k に対して 5^k が p、q、r のそれぞれを割り切ることがわかるが、これは o でない整数では不可能である。したがって、整数解は $p = q = r = 0$ だけである。

検算

計算機で探索すると、$|a|, |b|, |c| \leq 60$ の範囲で $a^3 + 3b^3 = 9c^3$ の解は $(0,0,0)$ 以外に見つからず、$|p|, |q|, |r| \leq 150$ の範囲で $p^4 + 2q^4 = 5r^4$ についても同様に見つからない。p と q の一の位の組 100 通りをすべて調べると、$p^4 + 2q^4$ の一の位が 0 または 5 となるのは、両方の一の位が 0 または 5 のときに限ることが確かめられる。手計算による簡単な確認：$p = q = 1$ とすると $p^4 + 2q^4 = 3$ となり、表の予測どおり 5 の倍数ではない。

よくある間違い

- 各未知数が 3（あるいは 5）で割り切れることを示したところで止めてしまう。それだけではゼロであるとは言えない。要点は、割った結果が**同じ**方程式の解になるので、議論を繰り返せることである。
- 理由を述べずに「$3 \mid a^3$」から「$3 \mid a$」を導く。これが成り立つのは 3 が素数だからであり、たとえば $9 \mid a^3$ から $9 \mid a$ を導くことはできない（$a = 3$ で試してみよ）。
- 一の位を列挙するときに負の整数を忘れる。4 乗は偶数乗なので $p^4 = |p|^4$ であり、表ですべての場合が尽くされている。

STEP のその先へ

無限降下法の起源はフェルマーにさかのぼる。フェルマーはこれを用いて、$x^4 + y^4 = z^2$ が正の整数解をもたないこと（したがってフェルマーの最終定理（Last Theorem）の $n = 4$ の場合）を証明した。ここで用いた考え方、すなわち素数のべきを法として非自明な解をもたない方程式は非自明な整数解をもちえない、という考え方は、p 進数（p-adic numbers）とハッセ原理（Hasse principle）の研究へと発展していく。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic* は、合同式と降下法への美しい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。