解答例

STEP I 2010、第 7 問

純粋数学 • ベクトルと交わる直線

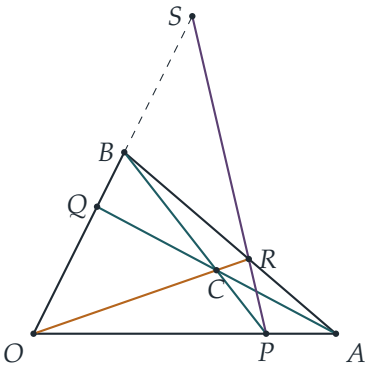
STEP I 2010、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q7

鍵となる考え方

O、A、B は同一直線上にない（not collinear）ので、平面上のすべての点は $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ の形にただ一通りに表せる。したがって、2 本の直線の交点を求めるには、それぞれの直線上の一般の点をこの形で書き、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の係数を比較（compare coefficients）すればよい。点が直線 OB 上にあるのは $\mathbf{a}$ の係数が 0 のときであり、またそのときに限る。点が AB 上にあるのは 2 つの係数の和が 1 のときであり、またそのときに限る。この 2 つの事実で、ほとんどすべてが片づく。



この図では $\alpha = \frac{1}{2}$、$\beta = \frac{7}{20}$ としている。S は直線 OB 上にあるが線分（segment）OB の外側にあり、一方 Q は O と B の間にあることに注意しよう。

解答

p と q を求める

直線 BC 上の一般の点は

$$\mathbf{b} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mu\alpha\,\mathbf{a} + (1 - \mu(1-\beta))\mathbf{b}.$$

と表される。直線 OA 上の点は $\lambda\mathbf{a}$ の形であり、$\mathbf{b}$ 成分をもたない。O、A、B は同一直線上にないので $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行でなく、係数を比較してよい。$\mathbf{b}$ の係数が 0 でなければならないから、$\mu = \dfrac{1}{1-\beta}$ である。$\beta < 1 - \alpha < 1$ より $1 - \beta \neq 0$ なので、これは許される。このとき

$$\mathbf{p} = \mu\alpha\,\mathbf{a} = \frac{\alpha\mathbf{a}}{1-\beta},$$

となり、求める結果が得られた。

この設定は $A \leftrightarrow B$ と $\alpha \leftrightarrow \beta$ を入れ替えても変わらない（このとき $P \leftrightarrow Q$ が入れ替わる）ので、ただちに

$$\mathbf{q} = \frac{\beta\mathbf{b}}{1-\alpha}.$$

と書ける。

点 R

まず、$\mathbf{r} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\,\mathbf{c}$ は $\mathbf{c}$ のスカラー倍であるから、R は直線 OC 上にある。

次に、$t = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ として $\mathbf{r} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$ と書く。実際、$1 - t = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ であり、これは $\mathbf{r}$ における $\mathbf{b}$ の係数に等しい。$t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} = \mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ の形の点はちょうど直線 AB 上の点であるから、R は AB 上にもある。

点 S

直線 PR 上の一般の点は $\mathbf{p} + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$ であり、これは

$$\left[\frac{\alpha}{1-\beta} + t\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)\right]\mathbf{a} \;+\; \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}.$$

に等しい。この点が OB 上にあるためには、$\mathbf{a}$ の係数が 0 でなければならない。$\alpha \neq 0$ で割ると

$$\frac{1}{1-\beta} = t \cdot \frac{(\alpha+\beta) - (1-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+\beta)}, \qquad \text{よって} \qquad t = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta-1}.$$

を得る。（問題文で 2 直線が交わるとされているので、$\alpha + 2\beta \neq 1$ でなければならない。$\alpha + 2\beta = 1$ ならば PR は OB と平行になる。）したがって

$$\mathbf{s} = \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b} = \frac{\beta}{\alpha+2\beta-1}\,\mathbf{b}.$$

である。

考えてみよう 位置ベクトル（position vector）$k\mathbf{b}$ を、O からの距離と B からの距離の比に直すにはどうすればよいか？

X の位置ベクトルが $k\mathbf{b}$ ならば、$\overrightarrow{OX} = k\mathbf{b}$、$\overrightarrow{BX} = (k-1)\mathbf{b}$ であるから

$$\frac{OX}{BX} = \frac{|k|}{|1-k|}.$$

となる。k は負になることも 1 より大きくなることもあり（図の S がまさにそうである）、絶対値が重要になる。

比

Q については $k = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ であり、$0 < \beta < 1-\alpha$ より $0 < k < 1$ である。このとき $1-k = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$ であるから

$$\frac{OQ}{BQ} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

S については $k = \dfrac{\beta}{\alpha+2\beta-1}$ であるから

$$1-k = \frac{\alpha+2\beta-1-\beta}{\alpha+2\beta-1} = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1'}, \qquad \frac{k}{1-k} = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1} = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

絶対値をとり、$\beta > 0$ と $1-\alpha-\beta > 0$ を用いると

$$\frac{OS}{BS} = \left|\frac{k}{1-k}\right| = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} = \frac{OQ}{BQ}.$$

これで証明が完了した。絶対値をとる前の負号は、Q が OB を内分（divide internally）し、S が同じ比で外分（divide externally）することを表している。

検算

- $\alpha = \frac{1}{2}$、$\beta = \frac{7}{20}$（図の値）で試す。このとき $\mathbf{q} = 0.7\mathbf{b}$、$\mathbf{s} = 1.75\mathbf{b}$ であるから、$OQ/BQ = 0.7/0.3 = \frac{7}{3}$、$OS/BS = 1.75/0.75 = \frac{7}{3}$ となる。公式からも $\beta/(1-\alpha-\beta) = 0.35/0.15 = \frac{7}{3}$ が得られる。
- ランダムな $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、α、β に対して、2 直線の方程式の組を解いて 4 つの交点をすべて直接計算し、公式と比較するとともに、2 つの比が一致することを確かめた。8000 通り以上の場合で一致した。
- 対称性（symmetry）：$\alpha \leftrightarrow \beta$ と $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$ を入れ替えると、$\mathbf{p}$ の公式は $\mathbf{q}$ の公式になる。当然そうなるべきである。

よくある間違い

- 絶対値を忘れること。**s** の係数は負になることも 1 より大きくなることもあり、不注意に $k/(1-k)$ を計算すると負の「長さの比」が出てしまう。
- なぜ許されるのかを述べずに **a** と **b** の係数を比較すること。これが成り立つのは **a** と **b** が平行でないからである。

STEP のその先へ

点 Q と S は OB を同じ比で内分・外分するので、O と B に関して**調和共役**（harmonic conjugates）である。ここでの図形、すなわち 4 本の直線とそれらの交点は、古典的な**完全四辺形**（complete quadrilateral）である。調和分割（harmonic division）は射影によって保たれ、射影幾何学（projective geometry）の中心的な考え方の一つである。点を 2 つの独立なベクトルで表して係数を比較するという習慣は線形代数（linear algebra）の出発点であり、そこでは基底（basis）という考え方になる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、その方面を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。