解答例

STEP I 2010、第 6 問

純粋数学 ・ 階数低下法

> **STEP I 2010、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q6

鍵となる考え方

2 階線形微分方程式（linear second-order differential equation）の解が一つわかっていれば、一般解（general solution）をその既知の解と未知関数 u の積として書くことで、u そのもの（微分されていない u）を含む項はすべて打ち消し合う。残るのは u' と u'' だけを含む項なので、これは実質的には $v = u'$ についての 1 階の方程式であり、しかも変数分離形（separable）である。この手法を**階数低下法**（reduction of order）という。

解答

$y = \mathrm{e}^x$ が解であることの確認

$y = \mathrm{e}^x$ ならば $y' = y'' = \mathrm{e}^x$ であるから

$$(x-1)\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x - 1 - x + 1)\mathrm{e}^x = 0,$$

となり、$y = \mathrm{e}^x$ は $(*)$ を満たす。

u についての方程式

$y = u\mathrm{e}^x$ とおく。積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (u' + u)\,\mathrm{e}^x,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= (u'' + u')\,\mathrm{e}^x + (u' + u)\,\mathrm{e}^x = (u'' + 2u' + u)\,\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

これを $(*)$ の左辺に代入し、因数 e^x をくくり出すと

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^x[(x-1)(u''+2u'+u)-x(u'+u)+u]\\&\quad=\mathrm{e}^x[(x-1)u''+(2x-2-x)u'+(x-1-x+1)u]\\&\quad=\mathrm{e}^x[(x-1)u''+(x-2)u'].\end{aligned}$$

u を含む項は、$y=\mathrm{e}^x$ を確認したときとまったく同じように打ち消し合う（あの確認は $u=1$ の場合にあたる）。e^x は決して 0 にならないので、$y=u\mathrm{e}^x$ が $(*)$ を満たすための必要十分条件は

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+(x-2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0,$$

であり、これは $(**)$ にほかならない。以上で示された。

v、そして u を求める

$v=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ とおくと、$(**)$ は 1 階の方程式

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-(x-2)\,v.$$

となる。$v=0$ は一つの解である。それ以外の場合は、$x\neq1$ かつ $v\neq0$ となる区間で考え、変数を分離する：

$$\int\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v=-\int\frac{x-2}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう $\dfrac{x-2}{x-1}$ はどのように積分すればよいか？

分子を分母を使って表す：$x-2=(x-1)-1$ であるから

$$\frac{x-2}{x-1}=1-\frac{1}{x-1}.$$

よって

$$\ln|v|=-x+\ln|x-1|+c,\qquad\text{したがって}\qquad v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x},$$

ただし $C=\pm\mathrm{e}^c$ である。$C=0$ も許せば解 $v=0$ も含まれるので、任意定数 C を用いて $v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x}$ と書ける。（これが $x=1$ も含めたすべての x で $(x-1)v'+(x-2)v=0$ を満たすことは、直接容易に確かめられる。）

次に積分して u を求める。$(x-1)$ を微分し、e^{-x} を積分する形で部分積分（integration by parts）を行うと

$$\begin{aligned}\int(x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}+\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

よって $u = -Cxe^{-x} + B$ である。$-C$ を改めて A とおくと

$$u = Axe^{-x} + B,$$

ここで A と B は任意定数である。

最後の部分

上で、u が $(**)$ を満たすならば $y = ue^x$ は $(*)$ を満たすことを示した。いま求めた $u = Axe^{-x} + B$ は $(**)$ を満たす。実際、その導関数は $v = -A(x-1)e^{-x}$ であり、これは v についての方程式の解だからである。したがって

$$y = ue^x = (Axe^{-x} + B)e^x = Ax + Be^x$$

は任意の定数 A, B に対して $(*)$ を満たす。以上で示された。

検算

$y = x$ を直接確かめる：$y' = 1, y'' = 0$ であるから、$(*)$ の左辺は $0 - x + x = 0$ となる。$(*)$ は線形なので、二つの解 x と e^x の任意の結合 $Ax + Be^x$ もまた解である。数値による確認として、$A = 2, B = -1, x = 0.5$ とすると $y = 1 - e^{0.5} \approx -0.64872$、$y' = 2 - e^{0.5} \approx 0.35128$、$y'' = -e^{0.5} \approx -1.64872$ であり、$(-0.5)(-1.64872) - 0.5(0.35128) - 0.64872 = 0.82436 - 0.17564 - 0.64872 = 0$ を得る。

よくある間違い

- 積の微分法により y'' に現れるのが（u' ではなく）$2u'$ であることを忘れる。
- 先に 1 を分離せずに、$\frac{x-2}{x-1}$ をいきなり対数として積分してしまう。
- v を積分して u を求めるときに積分定数を落とす。この定数 B こそが、もとの解 e^x を呼び戻すものである。

STEP のその先へ

階数低下法は任意の線形方程式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ に対して使える。y_1 が一つの解ならば、$y = uy_1$ とおくと必ず u' についての 1 階の方程式が得られる。ロンスキアン（Wronskian）に関するアーベル（Abel）の公式と合わせると、解全体が 2 次元のベクトル空間（vector space）をなすことがわかる。したがって、特異点（singular point）$x = 1$ を含まない各区間において、$Ax + Be^x$ は実はこの方程式の一般解である。Boyce

and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、この両方の考え方が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。