解答例

STEP I 2010、第 5 問

純粋数学 ・ 二項係数の恒等式

> **STEP I 2010、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q5

鍵となる考え方

これらの和はどれも、$(1+x)^n$ の二項展開（binomial expansion）が姿を変えたものであり、何らかの操作を施した後に $x=1$ を代入して得られる。$\binom{n}{k}$ の前に付く因子 k は x^k を微分すると現れるものであり、因子 $\frac{1}{k+1}$ は x^k を積分すると現れるものである。そこで、恒等式

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

を微分あるいは積分し、そのうえで $x=1$ を代入する。k^2 については、途中で x を掛ける操作を挟みながら 2 回微分する必要がある。

解答

以下、n は正の整数であり、

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \qquad (*)$$

がすべての実数 x に対して成り立つ。両辺はともに多項式（polynomial）であるから、項別に微分しても積分しても恒等式はそのまま成り立つ。

小問 (i)

$(*)$ に $x=1$ を代入する。左辺は 2^n となり、各 x^k は 1 になるので、

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (ii)

$(*)$ を x について微分する。定数項は消え、$\binom{n}{k}x^k$ は $k\binom{n}{k}x^{k-1}$ になる：

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}. \qquad (**)$$

$x = 1$ を代入すると

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1},$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (iii)

今度は $\binom{n}{k}$ を $k+1$ で割ったものが欲しい。これは $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$ から得られる。$(*)$ を 0 から 1 まで積分すると、左辺は

$$\int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},$$

であり、右辺は

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

である。したがって

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right),$$

となり、示すべき式が得られる。下端が重要であることに注意しよう。0 から積分することによって -1 が生じるのである。

小問 (iv)

考えてみよう $(**)$ をそのままもう一度微分すると、係数は k^2 ではなく $k(k-1)$ になってしまう。代わりに k^2 を得るにはどうすればよいか？

2 回目の微分をする前に、$(**)$ に x を掛ける。こうすると $k\binom{n}{k}$ とともに x^k のべきが元に戻るので、次の微分でちょうど k という因子がもう一つ現れる：

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k.$$

左辺に積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

（$n=1$ のときは左辺の第 2 項が因子 $n-1=0$ をもつので、その項は単に現れない。それでも恒等式は成り立つ。）ここで $x=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n} &= n\,2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}\\ &= n\,2^{n-2}(2+(n-1))\\ &= n(n+1)2^{n-2},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。

別の方法として、$k^2=k(k-1)+k$ と書くこともできる。$(*)$ を 2 回微分して $x=1$ を代入すると $\sum k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$ が得られ、これに小問 (ii) の結果を加えると同じ答えになる。

検算

$n=3$ をとる。このとき係数は $1,3,3,1$ である。

- (i) $1+3+3+1=8=2^3$.
- (ii) $3+6+3=12=3\cdot 2^2$.
- (iii) $1+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}=\frac{1}{4}(2^4-1)$.
- (iv) $3+12+9=24=3\cdot 4\cdot 2$.

また、1 から 40 までのすべての n について、4 つの恒等式すべてを分数を用いて厳密に確かめた。

よくある間違い

- (iii) で、下端からの寄与を忘れて $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ としてしまう。
- (iv) で、$(**)$ を直接微分してしまい、$\sum k^2\binom{n}{k}$ ではなく $\sum k(k-1)\binom{n}{k}$ を得てしまう。

STEP のその先へ

これらの恒等式には確率論的な意味がある。公平な硬貨を n 回投げたときの表の回数を X とすると、$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}/2^n$ であるから、小問 (ii) は $\mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}$ を、小問 (iv) は $\mathrm{E}(X^2)=\frac{n(n+1)}{4}$ を意味し、これより $\mathrm{Var}(X)=\frac{n}{4}$ が得られる。母関数（generating function）を微分してモーメント（moment）を取り出すのは、大学 1 年次の標準的な

手法である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、この手法がきちんと展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。