解答例

STEP I 2010、第 4 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP I 2010、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q4

鍵となる考え方

この置換は、x と $x+1$ がともに同じ分母 t^2-1 をもつ簡単な分数になるように選ばれている。そのため、両者の積の平方根がきれいに求まる。こうして積分は問題文の注にある標準的な積分に帰着する。体積については、y を 2 乗すると簡単な対数になる 2 つの項と 1 つの交差項（cross term）が現れ、その交差項こそがちょうど直前に求めた積分なのである。

解答

積分

$x>0$ とする。$t>1$ として置換（substitution）$x=\dfrac{1}{t^2-1}$ を行うことは正当である。実際、t について解くと

$$t=\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}},$$

となり、t が $(1,\infty)$ を動くとき、x は $(0,\infty)$ を（減少しながら）動き、各 t に対して x の値がただ 1 つ対応する。

さて、

$$x+1=\frac{1}{t^2-1}+1=\frac{t^2}{t^2-1},\qquad \text{よって}\qquad x(x+1)=\frac{t^2}{(t^2-1)^2}.$$

$t>1$ であるから、t と t^2-1 はともに正であり、

$$\sqrt{x(x+1)}=\frac{t}{t^2-1}.$$

考えてみよう 平方根をとるときに、なぜ $t>1$ が必要だったのだろうか。

平方根は決して負にならないので、$\sqrt{t^2/(t^2-1)^2}=|t|/|t^2-1|$ である。条件 $t>1$ により、2 つの絶対値記号をともに外すことができる。これは置換の選び方の理由も説明している。$t^2-1>0$ こそが、ちょうど $x>0$ を保証する条件なのである。

微分すると $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2-1}{t}\cdot\left(-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t = -2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c = \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)+c,\end{aligned}$$

となる。ここで、問題文の注を $a=1$ として用い、さらに $t>1$ より $(t-1)/(t+1)$ が正であることを用いた。

次に、$t=\sqrt{x+1}/\sqrt{x}$ を用いて x に戻す。分子と分母に $\sqrt{x}$ を掛けると

$$\frac{t+1}{t-1}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}{(x+1)-x}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

となる。ここで、分子と分母に $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ を掛け、2 乗の差の公式（difference of two squares）を用いた。よって

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+c,$$

となり、示すべき式が得られた。

体積

$x>0$ において、$\sqrt{x}<\sqrt{x+1}$ より $1/\sqrt{x}>1/\sqrt{x+1}$ となるので、曲線は $y>0$ を満たす。よって、曲線と x 軸の間の領域を回転させてできる回転体の体積（volume of revolution）は $V=\pi\int y^2\,\mathrm{d}x$ である。展開すると

$$y^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x(x+1)}},$$

であり、最後の項は前半の被積分関数の 2 倍である。したがって

$$V=\pi\Big[\ln x+\ln(x+1)\Big]_{1/8}^{9/16}-2\pi\Big[2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\Big]_{1/8}^{9/16}.$$

積分区間の端は、平方根がきれいな値になるように選ばれている。

▶ $x=\frac{9}{16}$ では、$\sqrt{x}=\frac{3}{4}$、$\sqrt{x+1}=\frac{5}{4}$ で、その和は 2 であり、$x(x+1)=\frac{225}{256}$ である。

- $x=\frac{1}{8}$ では、$\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$、$\sqrt{x+1}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ で、その和は $\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ であり、$x(x+1)=\frac{9}{64}$ である。

1 つ目の括弧は

$$\ln\frac{225}{256}-\ln\frac{9}{64}=\ln\left(\frac{225}{256}\cdot\frac{64}{9}\right)=\ln\frac{25}{4},$$

であり、2 つ目の括弧は

$$2\ln 2-2\ln\sqrt{2}=2\ln 2-\ln 2=\ln 2.$$

である。したがって

$$V=\pi\ln\frac{25}{4}-2\pi\ln 2=\pi\ln\frac{25}{4}-\pi\ln 4=\pi\ln\frac{25}{16}=2\pi\ln\frac{5}{4},$$

となり、求める結果が得られた。

検算

- 答えを微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}},$$

  となる。括弧の中が $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$ に等しいからである。

- 数値的には、シンプソンの公式 (Simpson's rule) により $\pi\int_{1/8}^{9/16}y^2\,\mathrm{d}x\approx 1.402052$ が得られ、$2\pi\ln\frac{5}{4}\approx 1.402052$ と一致する。シンプソンの公式からは $\int_{1/8}^{9/16}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}=\ln 2\approx 0.693147$ も確かめられる。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ のマイナス符号を忘れること。この符号こそが $\ln\frac{t-1}{t+1}$ を $\ln\frac{t+1}{t-1}$ に変えるのである。
- y^2 を $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ と展開してしまうこと。交差項 $-2/\sqrt{x(x+1)}$ こそが前半の要点である。
- 体積の公式で係数 π を忘れること、あるいは π の代わりに 2π を用いること。

STEP のその先へ

答え $2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$ は、実は $2\operatorname{arsinh}\sqrt{x}$ である。なぜなら $\operatorname{arsinh}u=\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$ だからである。置換 $x=\sinh^2\theta$ を用いれば、同じ結果が 1 行で得られる。

平方根を有理化するような置換を選ぶことは体系的な技法（オイラー（Euler）置換（Euler substitutions））であり、x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理関数（rational function）の積分はすべて初等関数（elementary functions）で求められるという結果の背後にある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の積分がさらに多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。