解答例

STEP I 2010、第 3 問

純粋数学 • 和積の公式

> **STEP I 2010、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q3

鍵となる考え方

正弦（または余弦）の差を積に変えるのが和積公式（sum-to-product formulae）である。楕円（ellipse）上のパラメータ u と v の点を結ぶ弦（chord）の傾き（gradient）は $\dfrac{b(\sin v - \sin u)}{a(\cos v - \cos u)}$ である。分子も分母も差なので、この公式で因数分解でき、共通因数が約分されて、傾きは和 $u+v$ だけで決まる。すると、二つの弦の比較は二つの余接（cotangent）の比較に帰着する。

解答

三角関数の恒等式

加法定理（compound-angle formulae）を用いると、

$$\begin{aligned}\sin(x+y) - \sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) - (\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= 2\cos x \sin y,\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。次に、任意の A と B に対して $x = \frac{1}{2}(A+B)$、$y = \frac{1}{2}(A-B)$ とおくと、$x+y = A$、$x-y = B$ である。恒等式は

$$\sin A - \sin B = 2\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\ \sin \tfrac{1}{2}(A-B).$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned}\cos(x+y) - \cos(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= -2\sin x \sin y,\end{aligned}$$

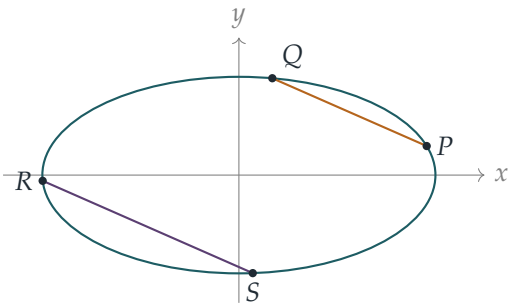
であり、同じ置き換えにより

$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

が得られる。

平行な弦

4点はすべて楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあり、反時計回りに P、Q、R、S の順に並んでいる。図は $a=2$、$b=1$ の場合の平行な弦の組を示している。



弦の傾き。 $[0,2\pi)$ 内の二つのパラメータ $u<v$ を、$(a\cos u, b\sin u)$ と $(a\cos v, b\sin v)$ を通る弦が鉛直でない、すなわち $\cos v \neq \cos u$ となるようにとる。$A=v$、$B=u$ として二つの恒等式を用いると、その傾きは

$$\frac{b(\sin v-\sin u)}{a(\cos v-\cos u)}=\frac{2b\cos\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)}{-2a\sin\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)}=-\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u+v).$$

である。この約分は正当である。実際、$0<v-u<2\pi$ より $\frac{1}{2}(v-u)$ は0と π の間（両端を除く）にあり、$\sin\frac{1}{2}(v-u)\neq 0$ となる。もとの分母は0でないので $\sin\frac{1}{2}(u+v)\neq 0$ でもあり、余接は定義される。

$\alpha=\frac{1}{2}(p+q)$、$\beta=\frac{1}{2}(r+s)$ とおく。PQ も SR も鉛直でないので、

$$\text{弦の傾き：}PQ=-\frac{b}{a}\cot\alpha,\qquad \text{弦の傾き：}SR=-\frac{b}{a}\cot\beta,$$

であり、$\sin\alpha\neq 0$ かつ $\sin\beta\neq 0$ である。鉛直でない2直線が平行であるのは傾きが等しいときであり、そのときに限る。さらに $b/a\neq 0$ なので、

$$PQ\parallel SR \iff \cot\alpha=\cot\beta.$$

考えてみよう なぜ単純に「cot を約分して」$\alpha = \beta$ と結論してはいけないのだろうか。

cot は単射（one-to-one）ではなく、周期（period）π で同じ値を繰り返すからである。これを正しく扱うために、差を一つの正弦で表す。

$$\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

分母は 0 でないので、

$$PQ \parallel SR \iff \sin(\beta-\alpha) = 0 \iff \beta - \alpha = k\pi \text{ を満たす整数} k.$$

が存在する。

k の決定。

$$\beta - \alpha = \tfrac{1}{2}[(r-p)+(s-q)].$$

である。$p < r$ かつ $q < s$ より、二つの括弧はどちらも正なので $\beta - \alpha > 0$ である。4 つのパラメータはすべて $[0, 2\pi)$ にあるので、各括弧は 2π より小さく、$\beta - \alpha < 2\pi$ となる。0 と 2π の間（両端を除く）にある π の倍数は π 自身のみであるから、$k = 1$ である。したがって

$$PQ \parallel SR \iff \tfrac{1}{2}(r+s-p-q) = \pi \iff r+s-p-q = 2\pi.$$

各段階はすべて同値変形なので、これで両方向が示された。

（2 直線が一致することはない。直線と楕円の交点は高々 2 個であり、P、Q、R、S は相異なる 4 点だからである。したがって、ここでの「平行」は、一致しない真の平行を意味する。）

検算

- $p = 0$、$q = \frac{\pi}{2}$、$r = \pi$、$s = \frac{3\pi}{2}$ とすると、$r+s-p-q = 2\pi$ である。このとき $P = (a, 0)$、$Q = (0, b)$、$R = (-a, 0)$、$S = (0, -b)$ であり、PQ と SR の傾きはともに $-b/a$ である。$a = 2$、$b = 1$ とすると、どちらの傾きも -0.5 となる。
- 対称性：条件は $\frac{1}{2}(r+s) = \frac{1}{2}(p+q) + \pi$ を意味する。点の写像 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ はパラメータに π を加えるものであり、弦 PQ を半回転させると平行な弦が得られるので、これと整合する。
- 数値的にも、ランダムな a, b とランダムな $p < q < r < s$ をとると、$r+s-p-q = 2\pi$ となる場合（構成した約 5000 例）では傾きが正確に一致し、それ以外の場合には一度も一致しなかった。

よくある間違い

- $\cot\alpha = \cot\beta$ からただちに $\alpha = \beta$ としてしまう。これは $r+s = p+q$ を導くが、ここではそれは起こりえない。cot の周期こそが核心なのである。
- $\sin\frac{1}{2}(v-u)$ を約分できる理由を述べ忘れる、あるいは順序 $p < q < r < s$ を用いて $k = 0$ と $k = 2$ を除外していない。

STEP のその先へ

楕円を $(a\cos t, b\sin t)$ と表すと、楕円は単位円を伸縮 $(x,y) \mapsto (ax, by)$ で写した像であることがわかる。このような線形写像（linear map）は平行な直線を平行な直線に写すので、この問題は実は円についての問題である。円では、角 p から角 q への弦は角 $\frac{1}{2}(p+q)$ の半径に垂直であり、結果はほとんど明らかになる。写像で保たれる性質を利用して問題を簡単にするというこの種の考え方は、線形代数（linear algebra）や幾何学の至るところに現れる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、線形写像が実際に働く様子を見るのによい本である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、三角関数の恒等式を用いる STEP 形式の演習がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。