解答例

STEP I 2010、第 2 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

STEP I 2010、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q2

鍵となる考え方

商の微分法（quotient rule）で微分し、決して 0 にならない因数 e^x をくくり出す。すると停留点（stationary point）は 2 次式の根となるので、「停留点が 2 つある」とはその判別式（discriminant）についての主張になる。概形を描くには、同じ 2 次式の符号から曲線の増減がわかり、漸近線（asymptote）の近くおよび $x \to \pm\infty$ のときのふるまいから残りがわかる。

解答

$y = \dfrac{x-a}{x-b}\,\mathrm{e}^x$ とおく。これは $x \neq b$ で定義される。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right) = \dfrac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2} = \dfrac{a-b}{(x-b)^2}$ であるから、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-a}{x-b}\,\mathrm{e}^x + \frac{a-b}{(x-b)^2}\,\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x[(x-a)(x-b)+(a-b)]}{(x-b)^2}.$$

$x \neq b$ のとき $\mathrm{e}^x > 0$ かつ $(x-b)^2 > 0$ であるから、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の符号は

$$q(x) = (x-a)(x-b)+(a-b) = x^2 - (a+b)x + ab + a - b,$$

の符号に一致し、停留点はちょうど q の根のうち $x = b$ 以外のものである。

考えてみよう q の根が、曲線の定義されていない $x = b$ にくることはありうるだろうか？

これは問題にならない。$q(b) = a - b$ であるから、$x = b$ が根になるのは $a = b$ のときに限る。しかしそのとき曲線は単に $y = \mathrm{e}^x$（ただし $x = b$ に穴があく）であり、停留

点をまったくもたない。したがって、どの場合も停留点はちょうど q の実数解であり、停留点が2つあるのは q が異なる2つの実数解をもつとき、すなわち判別式が正のときに限る：

$$(a+b)^2 - 4(ab+a-b) = (a-b)^2 - 4(a-b) = (a-b)(a-b-4) > 0.$$

2つの因数の積が正になるのは、両方が正か両方が負のときである。両方が負であることは $a-b<0$ を意味し、両方が正であることは $a-b>4$ を意味する（これはすでに $a-b>0$ を含む）。よって、停留点が2つあるためには

$$a-b<0 \quad \text{または} \quad a-b>4,$$

が必要であり、これが示すべきことであった。（逆に、どちらの条件からも停留点が2つ得られる。）

小問 (i)

$a=0$、$b=\frac{1}{2}$ のとき $a-b=-\frac{1}{2}<0$ であり、

$$y=\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x-\frac{1}{2}}, \qquad q(x)=x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}=(x-1)(x+\tfrac{1}{2}).$$

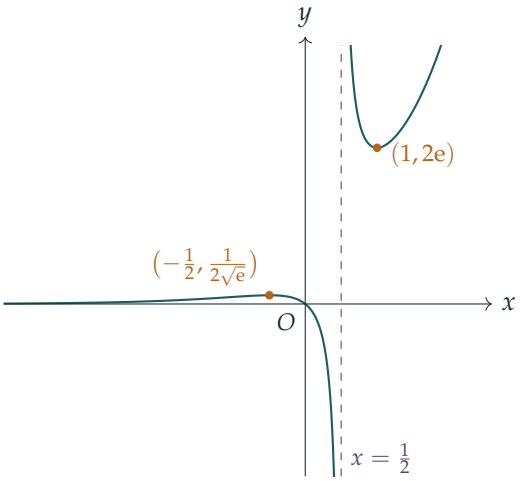
停留点は $x=-\frac{1}{2}$ と $x=1$ にあり、題意のとおり、鉛直漸近線 $x=\frac{1}{2}$ の両側に1つずつある。それらの y 座標は

$$y(-\tfrac{1}{2})=\frac{-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}}{-1}=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\approx 0.30, \qquad y(1)=\frac{\mathrm{e}}{\frac{1}{2}}=2\mathrm{e}\approx 5.44.$$

$x<-\frac{1}{2}$ で $q>0$、$-\frac{1}{2}<x<1$（ただし $x\neq\frac{1}{2}$）で $q<0$、$x>1$ で $q>0$ であるから、点 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}})$ は極大点（local maximum）、$(1,2\mathrm{e})$ は極小点（local minimum）である。

その他の特徴：

- $x\to-\infty$ のとき $\frac{x}{x-1/2}\to 1$ かつ $\mathrm{e}^x\to 0$ であるから $y\to 0$ である。$x<0$ では x も $x-\frac{1}{2}$ も負であるから $y>0$ となる。すなわち、曲線は x 軸の負の部分に上から近づく。
- 曲線が座標軸と交わるのは原点のみであり、$0<x<\frac{1}{2}$ で $y<0$ である。
- $x\to\frac{1}{2}^-$ のとき $y\to-\infty$、$x\to\frac{1}{2}^+$ のとき $y\to+\infty$ である（分子は $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2}>0$ に近づく）。
- $x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ であり、e^x のように増大する。



小問 (ii)

$a = \frac{9}{2}$、$b = 0$ のとき $a - b = \frac{9}{2} > 4$ であるから、やはり停留点は 2 つある。このとき

$$y = \frac{x - \frac{9}{2}}{x}\,\mathrm{e}^x, \qquad q(x) = x^2 - \tfrac{9}{2}x + \tfrac{9}{2} = \tfrac{1}{2}(2x - 3)(x - 3),$$

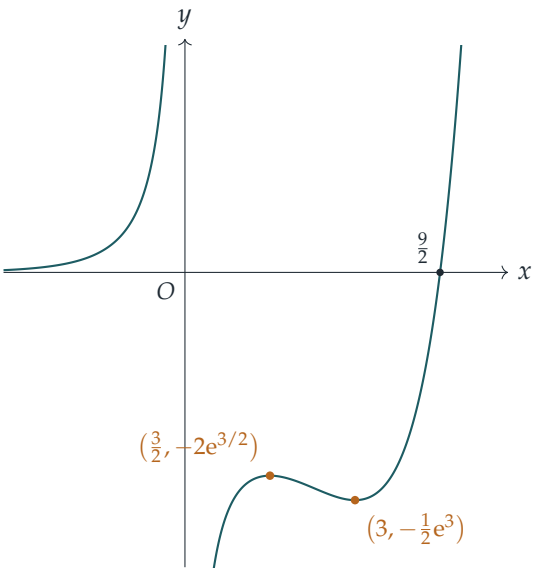
であるから、停留点は $x = \frac{3}{2}$ と $x = 3$ にあり、どちらも漸近線 $x = 0$ の右側にある。それらの y 座標は

$$y\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{-3}{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{3/2} = -2\mathrm{e}^{3/2} \approx -8.96, \qquad y(3) = \frac{-\frac{3}{2}}{3}\,\mathrm{e}^3 = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^3 \approx -10.04.$$

q の符号は $x < \frac{3}{2}$（$x \neq 0$）で正、$\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ で負、$x > 3$ で正であるから、$\left(\frac{3}{2}, -2\mathrm{e}^{3/2}\right)$ は極大点、$\left(3, -\frac{1}{2}\mathrm{e}^3\right)$ は極小点である。どちらも x 軸より下にあり、極小値は極大値よりわずかに小さいだけなので、その間のくぼみは浅いことに注意せよ。

その他の特徴：

- $x \to -\infty$ のとき $y \to 0$ である。$x < 0$ では $x - \frac{9}{2}$ も x も負であるから $y > 0$ となる。$x < 0$ では（そこで $q > 0$ であるから）曲線は増加し、軸のすぐ上から漸近線に向かって上がっていく。
- $x \to 0^-$ のとき $y \to +\infty$、$x \to 0^+$ のとき $y \to -\infty$ である（分子は $-\frac{9}{2}$ に近づく）。
- 軸との交点は $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ のみである。$\left(0, \frac{9}{2}\right)$ で $y < 0$、$x > \frac{9}{2}$ で $y > 0$ であり、$x \to \infty$ のとき $y \to \infty$ である。



ここでは y 軸そのものが鉛直漸近線である。

検算

- ランダムな (a,b,x) における y の数値微分は $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の式と一致する。また、ランダムな (a,b) について q の符号変化を数えると、停留点が2つになるのはちょうど $a-b<0$ または $a-b>4$ のときである。
- (i) では $y(1)=5.4366=2\mathrm{e}$、$y(-\frac{1}{2})=0.3033$ であり、(ii) では $y(\frac{3}{2})=-8.9634$、$y(3)=-10.0428$ である。各点のすぐ両側の値から、極大か極小かが確かめられる。
- 条件の妥当性の確認：(i) では $a-b=-\frac{1}{2}$、(ii) では $a-b=\frac{9}{2}$ であり、当然ながらどちらも許される範囲に入っている。

よくある間違い

- 判別式が $(a-b)^2-4(a-b)$ であることに気づかずに展開してしまう。$a-b$ を用いて書けば、きれいに因数分解できる。
- q の根が漸近線 $x=b$ 上にこないことの確認を忘れる。
- (ii) で極大点と極小点を x 軸の反対側に描いてしまう。どちらも軸より下にあり、曲線が軸と交わるのは $x=\frac{9}{2}$ のみである。

STEP のその先へ

ここでの方法、すなわち導関数の符号と極限から曲線の形を読み取るという方法は、大学最初の解析学の講義において、平均値の定理（Mean Value Theorem）（区間上で導関数が正ならば本当に増加する）と、無限遠での極限の注意深い定義によって厳密なものとなる。$x \to \pm\infty$ のとき e^x がどんな有理関数（rational function）にも勝るという事実も、そこで証明される標準的な結果である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これらすべてを見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。