解答例

STEP I 2010、第 13 問

確率・統計 ・ ポアソン過程の待ち時間

STEP I 2010、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s1-q13

鍵となる考え方

「最初のメッセージが 1 時間後から 2 時間後の間に届く」ということは、「最初の 1 時間にはメッセージが届かないが、最初の 2 時間にメッセージが 1 通も届かないわけではない」ということと同じである。そのそれぞれは事象が 0 回起こるポアソン分布（Poisson distribution）の確率であり、1 つの指数関数（exponential）で表される。さらに $x = \mathrm{e}^{\lambda}$ と置換すればすべてが 2 次方程式に帰着し、あとは解と係数の関係（Vieta's formulas、2 解の和と積）がミルドレッドの場合も含めて残りの仕事をしてくれる。

解答

通常のポアソンモデルを採用する。すなわち、長さ t 時間の任意の区間にジョージが受け取るメッセージの数は平均 λt のポアソン分布に従い、重なり合わない区間における個数は互いに独立（independent）であるとする。時刻は朝の始まりから測る。時間は連続であるから、最初のメッセージがちょうど 1 時間後またはちょうど 2 時間後に届く確率は 0 であり、したがって区間の端点を含めるかどうかは問題にならない。

ジョージの方程式

ジョージの最初のメッセージまでの時間（単位は時間）を T とする。$T > t$ となるのは $[0, t]$ にメッセージが 1 通も届かないときであり、かつそのときに限るので、

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(\text{ポアソン}(\lambda t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

事象 $\{1 < T \leq 2\}$ は $\{T > 1\}$ から $\{T > 2\}$ を取り除いたものであり、$\{T > 2\} \subseteq \{T > 1\}$ であるから、

$$p = \mathrm{P}(1 < T \leq 2) = \mathrm{P}(T > 1) - \mathrm{P}(T > 2) = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}.$$

両辺に $\mathrm{e}^{2\lambda}$ を掛けると $p\mathrm{e}^{2\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda} - 1$、すなわち

$$p\mathrm{e}^{2\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda} + 1 = 0,$$

となり、題意が示された。

λ の 2 つの正の値

$x = \mathrm{e}^{\lambda}$ とおく。$\lambda \mapsto \mathrm{e}^{\lambda}$ は $(0, \infty)$ から $(1, \infty)$ への狭義単調増加（strictly increasing）な全単射（bijection）であるから、正の解 λ は

$$px^2 - x + 1 = 0.$$

の解 $x > 1$ とちょうど 1 対 1 に対応する。ここで $p > 0$ である（たとえば $[1, 2]$ にちょうど 1 通のメッセージが届き、それ以前には 1 通も届かないときには必ず起こる事象の確率だからである）。よってこれは確かに 2 次方程式である。

> **考えてみよう** 解が実数であることを示すのは易しい。では、2 つの解がどちらも 1 より大きいことはどうすればわかるだろうか。

相異なる実数解であること。 判別式（discriminant）は、$4p < 1$ であるから $1 - 4p > 0$ である。よって相異なる 2 つの実数解 $x_1 < x_2$ が存在する。

どちらも 1 より大きいこと。 解と係数の関係より、$x_1 + x_2 = \frac{1}{p}$ かつ $x_1 x_2 = \frac{1}{p}$ である。すると

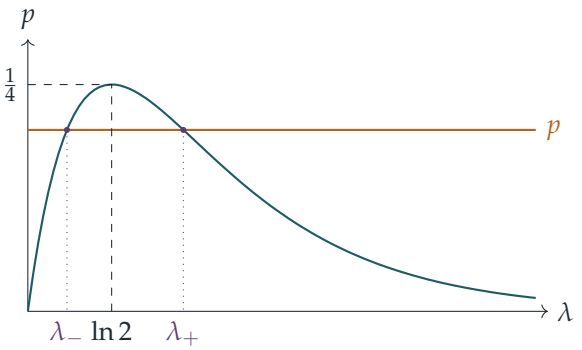
$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + 1 = 1 > 0,$$

であるから、$x_1 - 1$ と $x_2 - 1$ は同符号である。その和は $x_1 + x_2 - 2 = \frac{1}{p} - 2 > 0$ である。$p < \frac{1}{4}$ より $\frac{1}{p} > 4$ となるからである。よって両者はともに正であり、$x_1 > 1$ かつ $x_2 > 1$ である。

したがって $\lambda_{\pm} = \ln\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4p}}{2p}\right)$ は、方程式を満たす λ の相異なる 2 つの正の値である。

図を描くとこのことがよく理解できる。λ の関数として見ると、$p = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}$ は $\lambda = 0$ で 0 であり、$\lambda \to \infty$ のとき 0 に近づき、さらに（$u = \mathrm{e}^{-\lambda}$ とおくと $p = u - u^2$ となるので）$u = \frac{1}{2}$、すなわち $\lambda = \ln 2$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。高さ $p < \frac{1}{4}$ の水平な直線はこのグラフと 2 回交わる。つまり、静かな電話（メッセージがそもそもめったに届

かない）と忙しい電話（メッセージがたいてい最初の 1 時間以内に届く）が同じ p を与えうるのである。



ミルドレッド：$\lambda_1 + \lambda_2$

それぞれの電話を単独で見ればジョージの状況とまったく同じであるから、e^{λ_1} と e^{λ_2} はどちらも $px^2 - x + 1 = 0$ を満たす。この 2 次方程式の解は 2 つしかなく、$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから、e^{λ_1} と e^{λ_2} はその 2 つの解 x_1 と x_2 である。（このためには $p < \frac{1}{4}$ が必要であるが、相異なる 2 つの値が存在するのだからこれは成り立つ。$p = \frac{1}{4}$ のときは重解（repeated root）となるからである。）2 解の積より、

$$e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2} = x_1x_2 = \frac{1}{p}, \qquad \text{よって} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \ln\frac{1}{p} = -\ln p.$$

ミルドレッドの最初のメッセージ

考えてみよう ミルドレッドが 2 台の電話で受け取るメッセージの総数は、どのような分布に従うだろうか。

2 つの個数は独立なポアソン分布に従う確率変数であるから、その和は平均の和を平均とするポアソン分布に従う。すなわち、t 時間に彼女が受け取るメッセージの総数はポアソン$((\lambda_1 + \lambda_2)t)$ に従う。同じことであるが、2 台の電話での待ち時間をそれぞれ T_1, T_2 とすると、これらは独立であり、彼女の最初のメッセージは $T = \min(T_1, T_2)$ に届いて、

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(T_1 > t)\,\mathrm{P}(T_2 > t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

いずれにせよ、$\mu = \lambda_1 + \lambda_2$ とおくと $e^{-\mu} = p$ であり、ジョージの場合と同じ議論により

$$\mathrm{P}(1 < T \leq 2) = e^{-\mu} - e^{-2\mu} = p - p^2 = p(1 - p).$$

を得る。

検算

- $\lambda = 0.8$ のとき $p = \mathrm{e}^{-0.8} - \mathrm{e}^{-1.6} \approx 0.2474$ である。指数分布に従う待ち時間を 2×10^5 個生成したシミュレーションでは 0.2462 となった。
- $p = 0.2$ のとき、解は $\lambda_1 \approx 0.3235$ と $\lambda_2 \approx 1.2859$ であり、どちらも正で、その和は $1.6094 = \ln 5 = -\ln 0.2$ である。$\min(T_1, T_2)$ をシミュレーションすると、最後の確率は 0.1601 となり、$p - p^2 = 0.16$ とよく一致した。
- 妥当性の確認：$p(1-p) < p$ となっており、これは当然である。2 台の電話があれば最初のメッセージはより早く届く傾向にあるので、「1 時間メッセージが届かない」ことは起こりにくくなるからである。

よくある間違い

- x についての解が実数かつ正であることは示したものの、$\lambda > 0$ であるためには単に $x > 0$ ではなく $x > 1$ が必要であることを忘れてしまう。
- 最後の小問で、2 台の電話についての確率を足したり、掛けたり（p^2）してしまう。正しい事象は「どちらかの電話に最初のメッセージが届くこと」であり、これは合わせた到着率によって決まる。

STEP のその先へ

ポアソン過程（Poisson process）において最初の事象が起こるまでの待ち時間は指数分布に従う。また、ここで用いた合併の性質（到着率 λ_1、λ_2 の独立なポアソン過程を合わせると、到着率 $\lambda_1 + \lambda_2$ の 1 つのポアソン過程になる）は、間引き（thinning、各事象を独立に確率 q で残すこと）と並んで、ポアソン過程の基本的な性質の 1 つである。これらの考え方は待ち行列理論（queueing theory）や応用確率論の多くの分野の土台となっている。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この問題から自然につながる形でポアソン過程を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。