解答例

STEP I 2010、第 11 問

力学 ・ 円周上での衝突

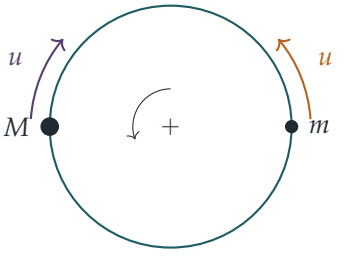
> **STEP I 2010、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q11

鍵となる考え方

2 つの質点は円周上を動くが、各衝突は共通接線（common tangent）に沿った通常の 1 次元の衝突である。なめらかな溝は運動に垂直な向きにしか押さないので、速さを変えることも、接線方向の力積（impulse）に影響を与えることもできない。そこで、円周に沿って測った**符号付き**速度を用いて、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの実験法則（Newton's experimental law）を適用する。そうすれば、あとは 2 つの事実がすべての情報を担う。すなわち、符号付きの運動量の総和は決して変化せず、相対速度（relative speed）は衝突のたびに e 倍になる。

解答

2 つの質点を、なめらかな水平の溝の中にある点としてモデル化する。反時計回りを正の向きとし、はじめ m は速さ u で反時計回りに、M は速さ u で時計回りに動いているとする。したがって、それぞれの符号付き速度は u と $-u$ である。



衝突と衝突の間に各質点にはたらく水平方向の力は、なめらかな溝からの垂直抗力（normal reaction）だけであり、これは速度に垂直である。この力は仕事をしないので、

各質点は一定の速さを保つ。衝突の際、質点どうしが及ぼし合う力積は共通接線に沿ってはたらき、大きさが等しく向きが逆である。また、溝は接線方向の力積を与えない。よって各衝突において、円周に沿った符号付きの運動量の総和は変化せず、ニュートンの法則は符号付き速度に対して成り立つ。

最初の衝突

最初の衝突後の符号付き速度を、m については p、M については q とする。運動量保存則とニュートンの法則から

$$mp + Mq = mu - Mu,$$
$$q - p = e\big(u - (-u)\big) = 2eu.$$

$q = p + 2eu$ を第 1 式に代入すると $(m+M)p = (m-M)u - 2eMu$ となるので、

$$p = -\frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad q = p + 2eu = \frac{u\,\big(2em - (M-m)\big)}{M+m}.$$

したがって、最初の衝突後の速さは

$$\text{速さ}m = \frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad \text{速さ}M = \frac{u\,|2em - (M-m)|}{M+m}.$$

である（それぞれ m の速さ、M の速さ）。

考えてみよう どの符号が、質点が向きを変えたことを意味するだろうか？

質点 m は正の向きに動いていたので、向きを反転するのはちょうど $p < 0$ のときである。$M > m$ かつ $e \geq 0$ であるから、括弧内の $M - m + 2eM$ は正であり、m は**必ず**反転する。質点 M は負の向きに動いていたので、向きを反転するのはちょうど $q > 0$ のとき、すなわち

$$2em > M - m.$$

のときである。よってこの条件の下で、求められているとおり両方の質点が向きを変える。

さらに $2n$ 回衝突した後

$mv - MV = u(M-m)$ **となる理由**。はじめの符号付き運動量の総和は $mu - Mu = -u(M-m)$ である。衝突ではこれが保存され、衝突と衝突の間には速さは変わらないので、この値はいつまでも保たれる。

両方の質点は衝突のたびに反転するので、最初の衝突後、m は時計回りに、M は反時計回りに動く。その後の衝突のたびに、この向きは入れ替わる。さらに $2n$ 回衝突した

後には、全部で $2n+1$ 回、すなわち奇数回の衝突が起きているので、再び m は時計回りに、M は反時計回りに動いている。それぞれの符号付き速度は $-v$ と V であり、

$$m(-v) + MV = -u(M-m) \quad \Longrightarrow \quad mv - MV = u(M-m).$$

相対速度。各衝突の後、2 つの質点は円周に沿って互いに逆向きに一定の速さで離れていき、次は円の反対側で出会う。そのとき両者は、離れていったときと同じ相対速度で近づく。ニュートンの法則によれば、衝突後に離れる速さは、衝突前に近づく速さの e 倍である。はじめに近づく速さは $2u$ なので、$2n+1$ 回の衝突の後に離れる速さは $2ue^{2n+1}$ となる。2 つの質点は逆向きに動いているので、これは $v+V$ に等しい：

$$v + V = 2ue^{2n+1}.$$

連立方程式を解く。第 2 式を M 倍して第 1 式に加えると

$$(m+M)v = u(M-m) + 2Mue^{2n+1},$$

となり、第 2 式を m 倍して第 1 式を引くと

$$(m+M)V = 2mue^{2n+1} - u(M-m).$$

となる。よって

$$v = \frac{u\big(M-m+2Me^{2n+1}\big)}{M+m}, \qquad V = \frac{u\big(2me^{2n+1}-(M-m)\big)}{M+m}.$$

検算

- $n=0$ とおくと、上で求めた最初の衝突後の速さに戻る。
- $m=2, M=3, e=0.8, u=1$ のとき、公式は $n=0$ に対して $(v,V)=(1.16,\,0.44)$、$n=1$ に対して $(0.8144,\,0.2096)$ を与える。質点が円周を回って衝突する様子を 1 ステップずつシミュレーションすると、1 回目と 3 回目の衝突の後にちょうどこれらの値が得られる。
- 運動エネルギー（kinetic energy）は増加しないはずである。$e=1$ のとき $v = u\,\frac{3M-m}{M+m}$、$V = u\,\frac{3m-M}{M+m}$ であり、$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(m+M)u^2$ が成り立つことを確かめられる。

よくある間違い

- 速さと速度を混同すること。ニュートンの法則と運動量保存則は、符号付き速度を用いて書かなければならない。速さに直すのは最後だけである。

- さらに $2n$ 回の衝突とは全部で $2n+1$ 回であることを忘れること。これにより、べきは e^{2n} ではなく e^{2n+1} となる。
- 溝からの向心力（centripetal force）を気にしすぎること。この力は運動に垂直なので、速さを変えることもなく、衝突の式にも現れない。

STEP のその先へ

V の公式から、$e < 1$ のとき与えられた仮定がいつまでも続くわけではないことがわかる。$2me^{2n+1}$ が $M - m$ を下回ると、重い方の質点は反転しなくなる。ここで運動量が保存されるのは、回転という意味においてだけである。溝からの力は常に中心を通る向きにはたらくので、保存される量は実は中心のまわりの**角運動量**（angular momentum）であり、円の半径は約分されて消える。このような対称性（symmetry）から生じる保存則（conservation law）は、大学 1 年次の力学の中心的なテーマである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、角運動量と衝突を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。