解答例

STEP I 2010、第 10 問

力学 ・ ベクトルによる運動学

> **STEP I 2010、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q10

鍵となる考え方

すべては $\mathbf{r}$ を微分し、内積（dot product）をとることから導かれる。2 つのベクトルのなす角は $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ から求まり、垂直（perpendicular）であることは内積が零であることを意味する。2 つ目の粒子については、時刻 t における Q の位置が、ちょうど時刻 $t-T$ における P の位置であることに気づくのが有用である。位置を複素数（complex number）$z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ として表すと、最後の部分は 1 行の計算になる。

解答

速度と加速度

$\mathbf{r} = \mathrm{e}^t(\cos t,\ \sin t)$ とおく。積の微分法（product rule）により、

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t),\\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \mathrm{e}^t((\cos t - \sin t) + (-\sin t - \cos t),\ (\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t))\\ &= \mathrm{e}^t(-2\sin t,\ 2\cos t).\end{aligned}$$

速度と変位のなす角

大きさは $|\mathbf{r}| = \mathrm{e}^t$ であり、

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathrm{e}^{2t}[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] = \mathrm{e}^{2t}\cdot 2,$$

である。交差項 $\mp 2\sin t\cos t$ が打ち消し合うからである。よって $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t$ である。内積は

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{e}^{2t}[\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t)] = \mathrm{e}^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

したがって、$\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ のなす角を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|} = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

となり、すべての t について $\theta = \frac{\pi}{4}$ であり、題意は示された。($\mathrm{e}^t > 0$ より、どちらのベクトルも零ベクトルになることはないので、なす角は常に定義される。)

加速度は変位に垂直である

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{e}^{2t}[-2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t] = 0,$$

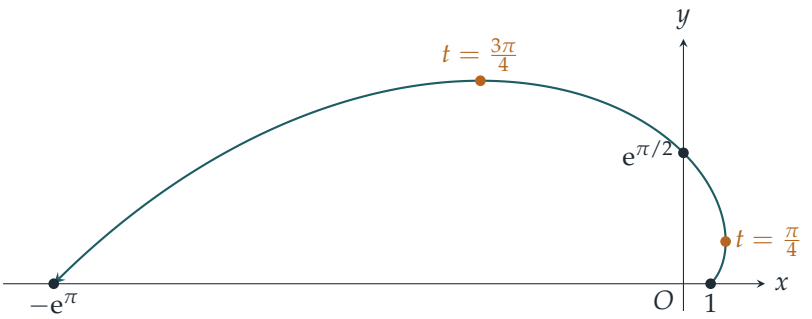
であり、どちらのベクトルも零ベクトルでないから、$\mathbf{a}$ は常に $\mathbf{r}$ に垂直である。また、$\mathbf{a} = 2\mathrm{e}^t(-\sin t, \cos t)$ は $\mathbf{r}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転させて 2 倍したものであることにも注意しよう。

$0 \le t \le \pi$ における軌跡

極座標(polar coordinates)では、軌跡は $\theta = t$ として $r = \mathrm{e}^\theta$ と表される。粒子が反時計回りに回るにつれて O からの距離が指数関数的に増大する、**等角螺旋**(equiangular spiral、対数螺旋(logarithmic spiral)とも呼ぶ)である。目印となる点は次のとおりである。

- $t = 0$:点 $(1, 0)$ にあり、x 軸に対して $\frac{\pi}{4}$ の角をなす方向 $(1, 1)$ に進む。
- $t = \frac{\pi}{4}$:$\dot{x} = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t) = 0$ なので x が最大となり、その点は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}\right) \approx (1.55, 1.55)$ である。
- $t = \frac{\pi}{2}$:点 $(0, \mathrm{e}^{\pi/2}) \approx (0, 4.81)$。
- $t = \frac{3\pi}{4}$:$\dot{y} = \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) = 0$ なので y が最大となり、その点は $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}\right) \approx (-7.46, 7.46)$ である。
- $t = \pi$:点 $(-\mathrm{e}^\pi, 0) \approx (-23.1, 0)$ で、$\frac{\pi}{4}$ の角をなして軸を横切り、左下へ向かう。

軌跡はすべての点で O からの動径と $\frac{\pi}{4}$ の角をなして交わり、これによって形が定まる。



2 つ目の粒子

考えてみよう 時刻 t において Q はどこにあるか。P の運動を用いて表せ。

Q は各点に P より T だけ遅れて到達するので、時刻 t には、時刻 $t-T$ に P があった位置にいる。

$$\mathbf{r}_Q(t) = \mathbf{r}(t-T) = e^{t-T}\big(\cos(t-T),\, \sin(t-T)\big).$$

すると

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |\mathbf{r}(t)|^2 + |\mathbf{r}(t-T)|^2 - 2\,\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t-T) \\ &= e^{2t} + e^{2t-2T} - 2e^{2t-T}\big(\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T)\big) \\ &= e^{2t}\big(1 - 2e^{-T}\cos T + e^{-2T}\big), \end{aligned}$$

となる。ここで $\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T) = \cos\big(t-(t-T)\big) = \cos T$ を用いた。したがって

$$|PQ| = k\,e^{t}, \qquad k = \sqrt{1 - 2e^{-T}\cos T + e^{-2T}},$$

であり、k は T のみに依存し、t には依存しない。よって P と Q の距離は e^t に比例し、題意は示された。（括弧の中身は $|1 - e^{-T}e^{iT}|^2$ であり、$T \neq 0$ のとき $e^{-T} \neq 1$ であるから正である。よって $k > 0$ である。）

複素数による別解。$z = x + iy$ とすると、P は $z_P = e^t e^{it} = e^{(1+i)t}$ に、Q は $z_Q = e^{(1+i)(t-T)}$ にある。よって

$$z_P - z_Q = e^{(1+i)t}\big(1 - e^{-(1+i)T}\big), \qquad |z_P - z_Q| = e^t\,\big|1 - e^{-(1+i)T}\big|.$$

これから、$\overrightarrow{QP}$ が z_P の一定の複素数倍であることもわかる。したがって線分 PQ は OP と一定の角をなし、三角形 OQP は同じ形を保ったまま、拡大しながら回転するだけである。

検算

- $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ を微分すると $\dot{z} = (1+\mathrm{i})z$、$\ddot{z} = (1+\mathrm{i})^2 z = 2\mathrm{i}z$ となる。$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ を掛けることは $\frac{\pi}{4}$ の回転であり、$2\mathrm{i}$ を掛けることは $\frac{\pi}{2}$ の回転である。これで前半の 2 つの結果が一目でわかる。
- 数値的に、無作為に選んだ t について $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ のなす角は $0.785398\ldots = \frac{\pi}{4}$ となり、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = 0$ となった。$T = 1$ のとき、試したすべての t で $|PQ|/\mathrm{e}^t = 0.85895\ldots$ となり、$\sqrt{1 - 2\mathrm{e}^{-1}\cos 1 + \mathrm{e}^{-2}}$ と一致した。
- $T \to 0$ のとき $k \approx T\sqrt{2}$ なので $|PQ| \approx \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t T = |\mathbf{v}|T$ となる。これは時間 T の間に進む距離であり、当然そうなるべき結果である。

よくある間違い

- Q の位置を $\mathbf{r}(t+T)$ としてしまう。Q は P の**後ろ**にいるので、位置は $\mathbf{r}(t-T)$ である。（それでも答えは e^t に比例するが、定数が異なる。）
- 時計回りに回る螺旋を描いたり、軌跡が原点を通るように描いたりする。O からの距離は $\mathrm{e}^t \geq 1$ であり、粒子が反時計回りに動くにつれて増加する。

STEP のその先へ

曲線 $r = \mathrm{e}^\theta$ は対数螺旋である。O を中心とするこの曲線の拡大はすべて、この曲線の回転になっている。交わる角が一定であることも、OQP が形を保つことも、これが理由である。大学 1 年次の講義では、平面上の運動はしばしば極座標の単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ を用いて扱われる。この場合は動径方向の加速度 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ が零になり、垂直であることが直接得られる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、まさにこの種の問題のために極座標を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。