解答例

STEP I 2010、第 1 問

純粋数学 ・ 平方完成

> **STEP I 2010、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q1

鍵となる考え方

この恒等式（identity）は、扱いにくい二次式を二つの平方の和と定数で書き直すものである。二つ目の方程式も同じ二つの括弧 $x-y+2$ と $2x-y$ を用いて書けることに気づけば、問題は二つの新しい未知数に関する簡単な二つの方程式に帰着する。これらは新しい未知数の平方について一次であるから、直接解くことができる。

解答

恒等式

右辺を展開すると、

$$\begin{aligned} &a(x-y+2)^2+b(cx+y)^2+d \\ &\quad =a(x^2+y^2-2xy+4x-4y+4)+b(c^2x^2+2cxy+y^2)+d \\ &\quad =(a+bc^2)x^2+(a+b)y^2+(2bc-2a)xy+4ax-4ay+(4a+d). \end{aligned}$$

これは恒等式であるから、$5x^2+2y^2-6xy+4x-4y$ と係数を比較する（comparing coefficients）ことができる：

$$\begin{aligned}
x:&\quad 4a=4, && \text{よって} a=1;\\
y:&\quad -4a=-4, && \text{これは一致する;}\\
y^2:&\quad a+b=2, && \text{よって} b=1;\\
xy:&\quad 2bc-2a=-6, && \text{よって} 2c=-4,\ c=-2;\\
x^2:&\quad a+bc^2=5, && \text{確認：} 1+4=5;\\
\text{定数項}:&\quad 4a+d=0, && \text{よって} d=-4.
\end{aligned}$$

x^2 の係数だけからは $c^2=4$ しか得られず、符号を決めるのは xy の係数であることに注意せよ。したがって

$$a=1,\qquad b=1,\qquad c=-2,\qquad d=-4,$$

すなわち

$$5x^2+2y^2-6xy+4x-4y\equiv(x-y+2)^2+(2x-y)^2-4,$$

である。ここで $(-2x+y)^2$ を $(2x-y)^2$ と書いた。

連立方程式

恒等式により、一つ目の方程式は

$$(x-y+2)^2+(2x-y)^2=13.$$

となる。

> **考えてみよう** 二つ目の方程式は見た目が異なる。これも同じ二つの括弧を用いて書けるだろうか？

その x と y の一次の項は $8x-8y$ であり、一つ目の方程式の項のちょうど 2 倍である。そこで、一次の項が合う $2(x-y+2)^2$ を試してみる：

$$2(x-y+2)^2=2x^2+2y^2-4xy+8x-8y+8.$$

左辺の残りは

$$6x^2+3y^2-8xy+8x-8y-2(x-y+2)^2=4x^2+y^2-4xy-8=(2x-y)^2-8.$$

である。よって二つ目の方程式は $2(x-y+2)^2+(2x-y)^2-8=14$、すなわち

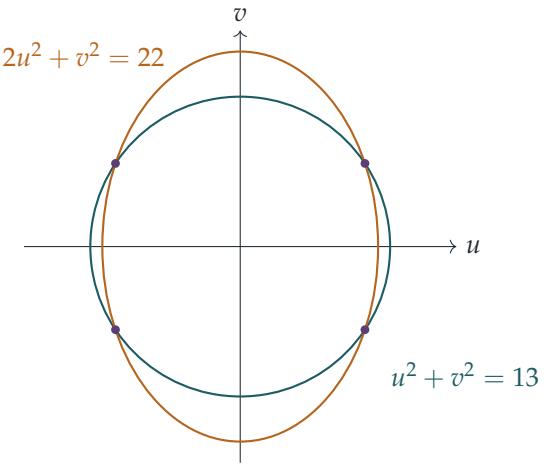
$$2(x-y+2)^2+(2x-y)^2=22.$$

となる。（恒等式を求めたときと同じように、$\alpha(x-y+2)^2+\beta(\gamma x+y)^2+\delta$ の係数を比較して求めることもできる。）

ここで $u=x-y+2$、$v=2x-y$ とおく。連立方程式（simultaneous equations）は

$$u^2+v^2=13, \qquad 2u^2+v^2=22.$$

となる。辺々引くと $u^2=9$ が得られ、したがって $v^2=4$ である。よって $u=\pm3$、$v=\pm2$ であり、符号はそれぞれ独立に選べるので、(u,v) の組は四つ得られる。



x と y に戻すには引き算をすればよい：$v-(u-2)=(2x-y)-(x-y)=x$ であるから

$$x=v-u+2, \qquad y=2x-v=v-2u+4.$$

この変数変換（change of variables）は一次かつ可逆であるから、各 (u,v) に対して (x,y) はちょうど一つ定まる。四つの解は次のとおりである：

u	v	x	y
3	2	1	0
3	−2	−3	−4
−3	2	7	12
−3	−2	3	8

よって

$$(x,y)=(1,0), \quad (-3,-4), \quad (7,12), \quad (3,8).$$

検算

$(1,0)$ を代入すると、一つ目の方程式は $5+4=9$、二つ目は $6+8=14$ となる。$(7,12)$ については $245+288-504+28-48=9$ および $294+432-672+56-96=14$ である。コンピュータを用いて、二つの恒等式を 1000 個のランダムな有理点で確かめ、また四つの組がすべて両方の方程式を満たすことも確かめた。$|x|,|y|\le 50$ を満たすすべての整数の組を総当たりで調べたところ、解はちょうどこの四つであった。二つの円錐曲線（conic）の交点は高々四つであるから、見落とした解はない。

よくある間違い

- xy の係数を確認せずに、$c^2=4$ から $c=2$ としてしまう。
- 正の平方根だけを考え、四つの解のうち一つしか求めない。
- もとの方程式から直接変数を消去しようとする。これは四次方程式（quartic）になり、手計算では非常に骨が折れる。

STEP のその先へ

二次形式を平方の組み合わせとして書き表すことは、二次形式（quadratic form）の理論の出発点である。対称行列（symmetric matrix）を対角化する（diagonalising）ことで、$Ax^2+Bxy+Cy^2$ を $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$ に変える一次の変数変換を常に見つけることができ、円錐曲線はこのようにして分類される。本問では、二つの方程式がたまたま同じ二つの平方を共有していたため、これほどきれいに分離できたのである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、対称行列と二次形式をわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。