解答例

STEP III 2009、第 9 問

力学 ・ 放物運動の軌道の角度

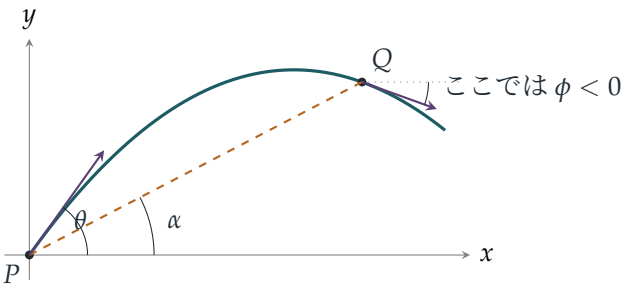
> **STEP III 2009、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q9

鍵となる考え方

放物運動（projectile motion）では、水平方向の速度はまったく変化せず、鉛直方向の速度は一定の割合で変化する。したがって、P と Q の間の鉛直方向の平均速度は両端での値の平均にほかならず、弦（chord）PQ の傾きは両端での傾きの平均になる。これで小問 (i) は一行で片づく。小問 (ii) では、軌道の方程式（trajectory equation）が（$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ と書き換えれば）$\tan\theta$ についての二次方程式（quadratic）になり、あとは解と係数の関係（sums and products of roots）がすべてを片づけてくれる。

解答

粒子は一定の重力 g のもとで自由に運動し、空気抵抗（air resistance）はないものとしてモデル化する。P を原点とし、x 軸を水平方向の正の向きに、y 軸を鉛直上向きにとる。投射の速さを u とし、$Q = (X, Y)$ とおく。$X > 0$ と仮定する。すなわち Q は P から見て正の側にあるので、水平方向の速度 $u\cos\theta$ は正であり、角 $\theta, \phi, \theta', \phi'$ はすべて $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属する。（もし Q が P の真上または真下にあれば、P と Q における角はどちらも $\pm\frac{\pi}{2}$ となり、問題は何も主張しないことになる。）このとき $\tan\alpha = Y/X$ である。



小問 (i)

水平方向の速度は一定で $u\cos\theta$ である。鉛直方向の速度は P で $u\sin\theta$、Q で v_Q とし、これは一定の割合 g で減少するので、時刻の一次関数（linear function）である。よって、P から Q までの飛行に時間 T かかるとすると、

$$X = (u\cos\theta)\,T, \qquad Y = \frac{u\sin\theta + v_Q}{2}\,T,$$

が成り立つ。区間上での一次関数の平均は両端の値の平均に等しいからである。各点において運動の向きは速度の向きなので、$\tan\theta = \dfrac{u\sin\theta}{u\cos\theta}$、$\tan\phi = \dfrac{v_Q}{u\cos\theta}$ である。割り算をすると

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{1}{2}\left(\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} + \frac{v_Q}{u\cos\theta}\right) = \tfrac{1}{2}(\tan\theta + \tan\phi),$$

となり、これは $\tan\theta + \tan\phi = 2\tan\alpha$ にほかならない。以上で示された。

小問 (ii)

二次方程式。 $x = ut\cos\theta$、$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ から t を消去すると、軌道は

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta).$$

となる。$k = \dfrac{gX^2}{2u^2}$ とおくと、これは正である。軌道は (X, Y) を通るので、$T = \tan\theta$ は

$$kT^2 - XT + (Y + k) = 0.$$

を満たす。2 本目の軌道も u、X、Y が同じなので、$\tan\theta'$ も同じ方程式を満たす。2 本の軌道は異なるので $\theta \neq \theta'$ であり、tan は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上で一対一（one-to-one）なので、$\tan\theta$ と $\tan\theta'$ はこの方程式の **2 つの**解である。したがって

$$\tan\theta + \tan\theta' = \frac{X}{k}, \qquad \tan\theta\tan\theta' = \frac{Y+k}{k} = 1 + \frac{Y}{k}.$$

1 つ目の結果。 加法定理（compound-angle formula）により

$$\tan(\theta+\theta') = \frac{\tan\theta+\tan\theta'}{1-\tan\theta\tan\theta'} = \frac{X/k}{-Y/k} = -\frac{X}{Y} = -\cot\alpha.$$

これには $Y \neq 0$ が必要である。$Y=0$ のとき（このとき $\alpha = 0$ で $\cot\alpha$ は定義されない）、解の積は 1 となり、これは $\theta+\theta' = \frac{\pi}{2}$ を意味する。水平な地面で同じ到達距離を与える、おなじみの余角（complementary angles）の組である。この意味で、結果はこの場合にも成り立つ。

2 つ目の結果。 $t = \tan\alpha = Y/X$、$s = \tan\theta+\tan\theta' = X/k$ とおく。すると $Y/k = ts$ なので、$\tan\theta\tan\theta' = 1+ts$ である。小問 (i) をそれぞれの軌道に適用すると

$$\tan\phi = 2t-\tan\theta, \qquad \tan\phi' = 2t-\tan\theta'.$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\tan\phi+\tan\phi' &= 4t-s,\\ 1-\tan\phi\tan\phi' &= 1-(4t^2-2ts+\tan\theta\tan\theta') = 1-4t^2+2ts-1-ts = t(s-4t).\end{aligned}$$

これらが同時に 0 になることはない。実際、$\tan\phi' = -\tan\phi$ ならば $\tan\phi\tan\phi' = -\tan^2\phi \leq 0 \neq 1$ である。$Y\neq 0$（すなわち $t\neq 0$）かつ $s \neq 4t$ のとき、

$$\tan(\phi+\phi') = \frac{4t-s}{t(s-4t)} = -\frac{1}{t} = -\cot\alpha = \tan(\theta+\theta').$$

それ以外の場合は、$1-\tan\phi\tan\phi'$ と $1-\tan\theta\tan\theta'$ がともに 0 である（$t=0$）か、あるいは $\tan(\phi+\phi')$ と $\tan(\theta+\theta')$ がともに無限大になる。したがって、いずれの場合も $\phi+\phi'$ と $\theta+\theta'$ は正接が等しいか、ともに $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍である。どちらにせよ

$$\theta+\theta'-(\phi+\phi') = n\pi \quad \text{ただしある整数} n.$$

考えてみよう 正接が等しいことからは、角は π の倍数の差を除いてしか定まらない。その倍数がちょうど π 1 つ分であることは、どうすればわかるだろうか。

角の大きさを用いる。それぞれの軌道で傾きは $\tan\theta - \dfrac{gx}{u^2\cos^2\theta}$ であり、これは x の増加とともに狭義に減少する。$X>0$ なので $\tan\phi < \tan\theta$、よって $\phi<\theta$ である。同様に $\phi'<\theta'$ である。4 つの角はすべて $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に属するので、$0<\theta-\phi<\pi$ かつ $0<\theta'-\phi'<\pi$ である。これらを足すと

$$0 < n\pi = (\theta+\theta')-(\phi+\phi') < 2\pi,$$

となるので $n=1$ であり、$\theta+\theta' = \pi+\phi+\phi'$ が示された。

検算

- $X = 1$、$Y = \frac{1}{2}$、$u^2 = 4g$ とすると $k = \frac{1}{8}$ である。二次方程式は $T^2 - 8T + 5 = 0$ となり、その解は $4 \pm \sqrt{11}$ である。このとき $\tan(\theta + \theta') = 8/(1-5) = -2 = -\cot\alpha$ となる。数値的には、$\tan\phi = 1 - \tan\theta$、$\tan\phi' = 1 - \tan\theta'$ として、$\theta + \theta' \approx 2.0344$、$\pi + \phi + \phi' \approx 2.0344$ である。
- 水平な地面（$Y = 0$）の場合：$\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$ であり、対称性から $\phi = -\theta$、$\phi' = -\theta'$ である。よって $\pi + \phi + \phi' = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ となり、期待どおりである。
- 運動を数値的に刻んで計算して小問 (i) を確かめ、さらに 2 本の軌道が存在するような u、X、Y を無作為に 20,000 通り選んで、小問 (ii) の両方の結果を検証した。

よくある間違い

- 正接が等しいことだけから $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$ と結論してしまう。正接が等しくても角は π の倍数の差を除いてしか定まらず、どの倍数かを決めるには不等式 $\phi < \theta$ と $\phi' < \theta'$ が必要である。
- $\tan\theta$ と $\tan\theta'$ が同じ二次方程式の**相異なる 2 つの**解である理由を述べ忘れる。これらが異なるのは、軌道が異なり、かつ tan が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上で一対一だからである。

STEP のその先へ

小問 (ii) には、可逆性（reversibility）の観点からの気持ちのよい解釈がある。どちらの軌道も逆向きにたどると、Q から P へ角 $\phi + \pi$ で投げ出された放物運動になる。つまり 4 つの角は両端の間の対称性によって結びついており、関係式 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$ はそれを表している。（摩擦や抵抗のない場合の）ニュートン（Newton）の法則の時間反転対称性（time-reversal symmetry）は、大学の力学全体を貫くテーマである。放物運動をはじめ多くの話題を大学 1 年生向けに徹底的に扱ったものとして、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。