解答例

STEP III 2009、第 8 問

純粋数学 • 極限と漸化式

> **STEP III 2009、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.5 節「2 年生の夢」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/sophomores-dream.html

鍵となる考え方

どの小問も、対数（logarithm）が「弱い」ことに関わっている。0 の近くで $\ln x$ は非常にゆっくりとしか発散しないので、x のどんな正の累乗も $\ln x$ のどんな累乗にも勝つ。置換（substitution）$x = \mathrm{e}^{-t}$ によって、これは指数関数が累乗に勝つという与えられた事実に帰着する。この極限が、部分積分（integration by parts）を行うときの境界項（boundary term）を消してくれる。最後の小問では、$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$ に指数関数の級数を適用すると、ちょうど小問 (ii) の積分が現れる。

解答

小問 (i)

$\ln x$ は $x > 0$ でのみ定義されるので、この極限は $x \to 0^+$ を意味する。$x = \mathrm{e}^{-t}$ とおくと $\ln x = -t$ であり、$x \to 0^+$ となるのはちょうど $t \to \infty$ のときである。このとき

$$x^m (\ln x)^n = \mathrm{e}^{-mt}(-t)^n = (-1)^n \mathrm{e}^{-mt} t^n.$$

因子 $(-1)^n$ は単なる一定の符号であり、与えられた結果により $t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-mt} t^n \to 0$ である。したがって

$$\lim_{x \to 0} x^m (\ln x)^n = 0.$$

2 つ目の結果については、$m = n = 1$ とすればよい。これにより $x \to 0$ のとき $x \ln x \to 0$ が得られる。指数関数は連続（continuous）であるから

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{極限} x \to 0,$$

となり、示すべき結果が得られた。

小問 (ii)

まず、この積分が意味をもつことを確認する。被積分関数 $x^m (\ln x)^n$ は $(0,1]$ で連続であり、小問 (i) により $x \to 0$ のとき 0 に収束する。よって $(0,1]$ で有界（bounded）であり、I_n は通常の（収束する）積分である。

$u = (\ln x)^{n+1}$、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x^m$ として I_{n+1} を部分積分する。このとき $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$、$v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ であるから

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

考えてみよう $\ln x$ が定義すらされない $x = 0$ での境界項はどうなるか？

下端は実際には $x \to 0^+$ の極限を意味する。小問 (i) を m、n の代わりに $m+1$、$n+1$ として適用すると（$m+1 \geq 1$ かつ $n+1 \geq 0$ なので、どちらも許される）、$x^{m+1}(\ln x)^{n+1} \to 0$ である。上端では $\ln 1 = 0$ かつ $n+1 \geq 1$ なので、その項も 0 である。したがって括弧の部分は消え、

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n,$$

となり、示すべき式が得られた。

I_n を求めるために、まず

$$I_0 = \int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}.$$

から出発する。漸化式（recurrence）の各ステップで $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $-\dfrac{k}{m+1}$ が掛けられるので

$$I_n = \left(-\frac{1}{m+1}\right)\left(-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{n}{m+1}\right)\frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

（1 行の数学的帰納法（induction）で確かめられる。n で成り立つならば、漸化式より $-\frac{n+1}{m+1} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(m+1)^{n+2}}$ となる。）

小問 (iii)

$0 < x \leq 1$ に対して $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$ と書き、指数関数の級数（exponential series）を用いると

$$x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}.$$

（$x = 0$ での値は積分に影響しない。小問 (i) により関数 x^x はそこで 1 に収束するので有界であり、この積分は通常の積分である。）

ここで項別に積分する。$n = 0$ の項は $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$ である。$n \geq 1$ のとき、第 n 項は小問 (ii) の I_n で $m = n$ としたものである（このとき m は正の整数なので許される）。

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

この式は $n = 0$ のときも 1 を与える。よって

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 + \cdots,$$

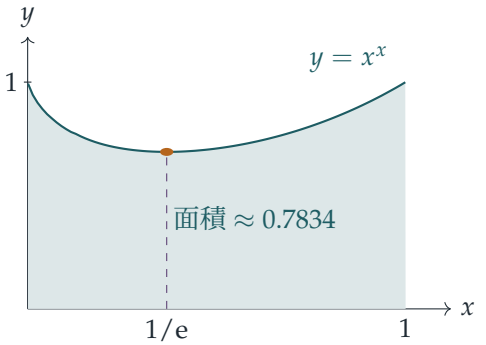
となり、これが示すべき結果である。

考えてみよう 無限和を項別に積分してよいのか？

無条件にはよくないが、ここでは $x\ln x$ が小さいままなので安全である。その導関数は $\ln x + 1$ なので、$(0,1]$ において $x = 1/\mathrm{e}$ で最小値をとり、$|x\ln x| \leq 1/\mathrm{e} < 1$ である。$u = x\ln x$ として級数を u^N の項で打ち切ると、剰余（remainder）は $(0,1]$ のすべての x に対して

$$\left|\sum_{n>N}\frac{u^n}{n!}\right| \leq \sum_{n>N}\frac{|u|^n}{n!} \leq \sum_{n>N}\frac{1}{n!} \leq \frac{2}{(N+1)!}$$

を満たす。長さ 1 の区間で積分すると、打ち切った項別積分（term-by-term integration）の誤差は高々 $2/(N+1)!$ であり、これは 0 に収束する。よって積分は級数の和に等しい。



検算

- 小問 (ii) で $m=1$、$n=1$ とすると $\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$ であり、直接部分積分した結果（$[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2]_0^1=-\frac{1}{4}$）と一致する。
- 数値的には、中点則（midpoint rule）により $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x\approx 0.7834305$ であり、部分和（partial sums）$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{256}+\frac{1}{3125}-\cdots$ は項が極めて速く小さくなるので、わずか数項で 0.7834305 に落ち着く。
- グラフは最小値 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}\approx 0.69$ と 1 の間にあるので、面積は 0.69 と 1 の間になければならず、実際そうなっている。

よくある間違い

- 0 での境界項を説明なしに落とすこと。これこそが小問 (i) の要点であり、$m+1\geq 1$ が必要である。
- I_n の符号を間違えること。$(0,1)$ で $\ln x<0$ なので、I_n は $(-1)^n$ と同じ符号をもつ。
- 小問 (iii) で $n=0$ の項を忘れること。先頭の 1 はこの項から来ている。

STEP のその先へ

最後の等式は「2 年生の夢」（sophomore's dream）として知られ、1697 年にヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）によって発見された。私たちが正当化しなければならなかったステップ、すなわち積分と無限和の交換は、大学 1 年の解析学（analysis）の中心的なテーマである。級数が**一様に**収束する（一様収束、uniform convergence）ならばこの交換は安全であり、私たちの剰余の評価が示しているのはまさにそのことである（これはワイエルシュトラス（Weierstrass）の M 判定法の一例である）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、一様収束と項別積分がうまくいく場合について、非常に読みやすい解説を与えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。