解答例

STEP III 2009、第 7 問

純粋数学 ・ 繰り返し微分と数学的帰納法

> **STEP III 2009、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q7

鍵となる考え方

すべては、一見何の変哲もない一つの恒等式（identity）$(1+x^2)f_0(x)=1$ から導かれる。これを繰り返し微分すると、連続する導関数どうしの関係式が得られる。ある n で成り立つ関係式をもう一度微分すれば次の関係式が得られるが、これはまさに帰納法（induction）の帰納段階の形そのものである。小問 (ii) では、$1+x^2$ の適切なべきを掛けることですべての分母が払われ、さらに二つ目の帰納法で最高次の項を追跡することにより次数が確定する。

解答

小問 (i)

$f_n(x)$ を f_n と書き、次の命題を $P(n)$ とする。

$$(1+x^2)f_{n+1}+2(n+1)xf_n+n(n+1)f_{n-1}=0.$$

基底段階（*base case*）。すべての x について $(1+x^2)f_0=1$ であるから、これを微分すると（$f_0'=f_1$ を用いて）

$$(1+x^2)f_1+2xf_0=0.$$

各項に積の微分法（product rule）を用いてさらに微分すると、

$$(1+x^2)f_2+2xf_1+2xf_1+2f_0=0, \qquad \text{すなわち} \qquad (1+x^2)f_2+4xf_1+2f_0=0,$$

となり、これが $P(1)$ である。

帰納段階。ある $n \geq 1$ について、すべての x で $P(n)$ が成り立つと仮定する。これは x についての恒等式であるから、微分してよい。$f_k' = f_{k+1}$ を用いると、

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x^2)f_{n+2} + 2xf_{n+1} + 2(n+1)f_n + 2(n+1)xf_{n+1} + n(n+1)f_n \\ &= (1+x^2)f_{n+2} + 2(n+2)xf_{n+1} + (n+1)(n+2)f_n, \end{aligned}$$

となる。ここで $2 + 2(n+1) = 2(n+2)$ および $2(n+1) + n(n+1) = (n+1)(n+2)$ を用いた。これは $P(n+1)$ である。よって数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つ。

（同じことだが、ライプニッツ（Leibniz）の公式を用いて $(1+x^2)f_0 = 1$ をちょうど $n+1$ 回微分してもよい。$1+x^2$ の 3 階導関数は 0 であるから残るのは 3 項だけであり、それらがちょうど $P(n)$ の 3 項になる。）

小問 (ii)

最初の三つ。$P_0 = (1+x^2)f_0 = 1$ である。次に、

$$f_1 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{よって} \qquad P_1 = (1+x^2)^2 f_1 = -2x.$$

f_1 を商の微分法（quotient rule）で微分すると、

$$f_2 = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3},$$

となるから、$P_2 = (1+x^2)^3 f_2 = 6x^2 - 2$ である。（小問 (i) で $n = 1$ とした $(1+x^2)f_2 = -4xf_1 - 2f_0$ からも同じ結果が得られる。）

漸化式（recurrence）。$P_n = (1+x^2)^{n+1} f_n$ を積の微分法で微分すると、

$$P_n' = 2(n+1)x(1+x^2)^n f_n + (1+x^2)^{n+1} f_{n+1}.$$

両辺に $1+x^2$ を掛けると、各項が P の形になる。

$$(1+x^2)P_n' = 2(n+1)x\,(1+x^2)^{n+1} f_n + (1+x^2)^{n+2} f_{n+1} = 2(n+1)xP_n + P_{n+1}.$$

整理すると、すべての $n \geq 0$ について

$$P_{n+1} - (1+x^2)P_n' + 2(n+1)xP_n = 0$$

が成り立ち、これが示すべきことであった。ここでは帰納法は不要であり、各 n について成り立つ直接の計算である。

考えてみよう 最高次の項が打ち消し合って次数が小さくなるのではなく、次数がちょうど n であることは、どうすればわかるだろうか。

帰納法を通して必要な情報を運べるよう、少し強い命題を証明する。すなわち、P_n は次数（*degree*）n の多項式であり、その最高次の係数（*leading coefficient*）a_n は $a_n \neq 0$ を満たす。$P_0 = 1$ であるから、$n = 0$ の場合は成り立つ。

ある $n \geq 0$ について成り立つと仮定する。すなわち $P_n = a_n x^n + (\text{低次の項})$、$a_n \neq 0$ とする。漸化式より、

$$P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - 2(n+1)xP_n.$$

P_n、したがって P_n' も多項式であるから、右辺は多項式である。さて $P_n' = na_n x^{n-1} + \cdots$ であり（$n = 0$ のときこれは 0 であり、$na_n = 0$ と整合する）、したがって $(1+x^2)P_n'$ は次数が $n+1$ 以下で、x^{n+1} の係数は na_n である。また $2(n+1)xP_n$ は次数 $n+1$ で、最高次の係数は $2(n+1)a_n$ である。よって P_{n+1} は次数が $n+1$ 以下であり、その x^{n+1} の係数は

$$a_{n+1} = na_n - 2(n+1)a_n = -(n+2)a_n.$$

$a_n \neq 0$ かつ $n+2 > 0$ であるから、これは 0 でない。したがって最高次の項は打ち消し合わず、P_{n+1} の次数はちょうど $n+1$ である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 0$ について P_n は次数 n の多項式である。

おまけとして、$a_0 = 1$ と $a_{n+1} = -(n+2)a_n$ から $a_n = (-1)^n(n+1)!$ が得られ、上の $a_1 = -2$ および $a_2 = 6$ と一致する。

検算

- 小問 (i) で $x = 0$、$n = 1$ のとき：P_n から $f_0(0) = 1$、$f_1(0) = 0$、$f_2(0) = -2$ が得られ、$f_2 + 0 + 2f_0 = -2 + 2 = 0$ となる。
- 漸化式で $n = 1$ のとき：$(1+x^2)P_1' - 4xP_1 = -2 - 2x^2 + 8x^2 = 6x^2 - 2 = P_2$。
- 数値的に $x = 0.7$ では、中心差分（central difference）により $f_0''(0.7) \approx 0.284164$ が得られ、$(6x^2-2)/(1+x^2)^3 = 0.284164$ となる。さらに、小問 (i) の関係式と漸化式を、200 個の無作為な有理数点において $n = 12$ まで有理数演算で厳密に確かめた。

よくある間違い

- 示すべき範囲に合った基底段階を証明しないこと：小問 (i) の恒等式は $n = 1$ から始まるので、基底段階は $n = 1$ でなければならず、そのためには f_2 が必要である。

- $(1+x^2)P_n'$ と $2(n+1)xP_n$ の x^{n+1} の項が打ち消し合わないことを確かめずに、「次数は毎回一つずつ上がる」と述べること。$n \neq 2(n+1)$ であるから打ち消し合うことはないが、そのことは明記しなければならない。

STEP のその先へ

複素数を用いて部分分数（partial fractions）に分解し、$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$ とすると、どの導関数も容易に求まり、閉じた形 $P_n(x) = (-1)^n\, n!\, \mathrm{Im}\,(x+\mathrm{i})^{n+1}$ が得られる（$n = 1, 2$ で確かめてみよ）。さらに $x = \cot\theta$ とおくと、P_n の零点は $k = 1, \ldots, n$ に対する $\cot\frac{k\pi}{n+1}$ であることがわかる。これらはすべて実数で互いに異なり、古典的な直交多項式（orthogonal polynomials）の零点と同様である。直交多項式もまた、簡単な関数を繰り返し微分することで生成される。複素数がなぜこの種の計算を手なずけるのかを知るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）が格好の一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。