解答例

STEP III 2009、第 6 問

純粋数学 ・ トレミーの定理

> **STEP III 2009、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q6

鍵となる考え方

単位円（unit circle）上の 2 点間の距離は、2 点のなす角だけで決まる。その距離を求めるこつは、「平均」の角をくくり出すことである。すなわち $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$ は $e^{i(\alpha+\beta)/2}$ と純虚数の積になる。すべての弦（chord）の長さを角の差の半分の正弦で表してしまえば、大きな恒等式は三角関数の恒等式になり、積和公式（product-to-sum formulae）を使えば数行で片がつく。さらに 4 点は円に内接する四角形をなし、この恒等式はその四角形に関する有名な定理なのである。

解答

弦の長さ

$e^{i(\alpha+\beta)/2}$ をくくり出す：

$$\begin{aligned} e^{i\beta} - e^{i\alpha} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}\left(e^{i(\beta-\alpha)/2} - e^{-i(\beta-\alpha)/2}\right) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2} \cdot 2i \sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

$|e^{i(\alpha+\beta)/2}| = 1$ かつ $|2i| = 2$ であるから、

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\,|\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)|.$$

最後に、$0 < \alpha < \beta < 2\pi$ より $0 < \frac{1}{2}(\beta - \alpha) < \pi$ となるので、正弦は正であり、絶対値記号を外すことができる：$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2 \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$。これが示すべきことであった。

考えてみよう そもそもなぜ $\alpha < \beta$ という条件があるのだろうか？

この条件がなければ、$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ は $(-\pi,0)$ に入りうるので正弦が負になり、公式は負の長さを与えてしまう。角に順序をつけることこそが、絶対値を外すことを可能にしているのである。また $|e^{i\alpha}-e^{i\beta}|=|e^{i\beta}-e^{i\alpha}|$ であるから、絶対値の中の順序は関係ないことにも注意しよう。

恒等式

$0<\alpha<\beta<\gamma<\delta<2\pi$ であるから、恒等式に現れるどの組も小さい順に並んでおり、6つの絶対値すべてに最初の結果が適用できる。共通因数 $2\cdot 2=4$ で両辺を割ると、示すべきことは

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma)+\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\alpha)=\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\beta).$$

である。自然な変数は、隣り合う点どうしの3つの間隔である。

$$x=\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),\qquad y=\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta),\qquad z=\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma),$$

とおくと、$\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)=x+y$、$\frac{1}{2}(\delta-\beta)=y+z$、$\frac{1}{2}(\delta-\alpha)=x+y+z$ となる。示すべき主張は

$$\sin x\sin z+\sin y\sin(x+y+z)=\sin(x+y)\sin(y+z).$$

である。それぞれの積に $2\sin P\sin Q=\cos(P-Q)-\cos(P+Q)$ を用いると、

$$\begin{aligned}2\sin x\sin z&=\cos(x-z)-\cos(x+z),\\ 2\sin y\sin(x+y+z)&=\cos(x+z)-\cos(x+2y+z),\\ 2\sin(x+y)\sin(y+z)&=\cos(x-z)-\cos(x+2y+z).\end{aligned}$$

最初の2行を足すと $\cos(x+z)$ の項が打ち消し合い、ちょうど3行目が得られる。よってこの三角関数の恒等式は成り立ち（実はすべての x,y,z について成り立つ）、4を掛け戻して弦の公式を用いれば

$$|e^{i\alpha}-e^{i\beta}|\,|e^{i\gamma}-e^{i\delta}|+|e^{i\beta}-e^{i\gamma}|\,|e^{i\alpha}-e^{i\delta}|=|e^{i\alpha}-e^{i\gamma}|\,|e^{i\beta}-e^{i\delta}|,$$

が得られる。これが示すべきことであった。

考えてみよう 三角関数の恒等式はすべての x、y、z について成り立つ。では、順序 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ はどこで使ったのだろうか？

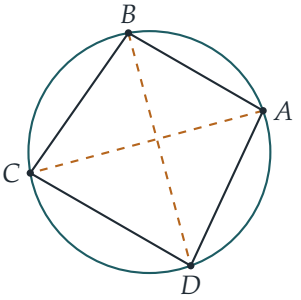
それぞれの絶対値を、絶対値記号なしの $2\sin$(角の差の半分) で置き換えたところである。点の順序がばらばらだと、それらの正弦のいくつかは負になり、長さについての恒等式は一般には成り立たない。たとえば角を $0.3,2,1,4$ とする（つまり $\gamma<\beta$）と、左辺は約 4.84、右辺は約 1.15 となる。

解釈

A, B, C, D をそれぞれ点 $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$ とする。これらは単位円上にあり、角の順序から、反時計回りに進むと A, B, C, D の順に出会う。よって $ABCD$ は、辺 AB, BC, CD, DA と対角線 AC、BD をもつ（凸な）円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）であり、恒等式は

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

を主張している。



どんな円も単位円を拡大縮小して平行移動すれば得られ、この等式の両辺は同じ倍率（拡大率の 2 乗）で変化するので、この結果はすべての円に内接する四角形について成り立つ：**円に内接する四角形において、2 組の対辺の積の和は対角線の積に等しい。**これがトレミーの定理（Ptolemy's theorem）である。

検算

- 単位円に内接する正方形（$\alpha, \beta, \gamma, \delta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$）は辺が $\sqrt{2}$、対角線が 2 であり、$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 = 2 \cdot 2$ となる。
- 辺が a, b の長方形では $a^2 + b^2 = (\text{対角線})^2$ が得られる。トレミーの定理はピタゴラスの定理（Pythagoras）を含んでいるのである。
- 数値的には、順序づけられた角の 4 つ組を無作為に 10^5 個とったところ、両辺は 2×10^{-15} 以内で一致した。

よくある間違い

- 正弦が正であることを確かめずに $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\sin\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ と書いてしまう。
- $\sin\frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ などを、加法定理（compound-angle formulae）で元の 4 つの角を用いて展開してしまう。それでもうまくいくが、3 つの間隔 x, y, z を使うよりはるかに

煩雑である。

- 恒等式には頂点が円周上の順に並んでいることが必要だということを忘れる。右辺に現れるのは任意の 2 本の弦ではなく、対角線である。

STEP のその先へ

一般の位置にある 4 点に対しては、同じ量はトレミーの**不等式**（Ptolemy's inequality）$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$ しか満たさず、等号が成り立つのはちょうど 4 点がこの順に同一円周上にあるときである。複素数の恒等式 $(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = (a-c)(b-d)$ と三角不等式を用いた鮮やかな証明がある。この背後には複比（cross-ratio）がある。複比はメビウス変換（Möbius transformations）の不変量であり、メビウス変換は円を円に移し、複素幾何学の中心をなすものである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらの考え方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。