解答例

STEP III 2009、第 5 問

純粋数学 • 解の対称式

> **STEP III 2009、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q5

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて、3 つの**基本対称式**（elementary symmetric functions）

$$e_1 = x + y + z, \qquad e_2 = yz + zx + xy, \qquad e_3 = xyz,$$

に関するものである。これらがわかれば、x、y、z は既知の 3 次方程式 $t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3 = 0$ の解となるからである。新しい情報はいずれも、与えられたべき和（power sums）のうち 2 つを掛け合わせ、どのような交差項が現れるかを調べることで得られる。漸化式（recurrence）はこの 3 次方程式から自然に導かれる。x、y、z のそれぞれがこの方程式を満たすので、それらのべき乗もまた同様の関係を満たすのである。

解答

$S_n = x^n + y^n + z^n$ とおく。すると与えられた条件は $S_1 = 1$、$S_2 = 2$、$S_3 = 3$ である。

$yz + zx + xy$ の値

S_1 を 2 乗すると、

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy),$$

であるから $1 = 2 + 2(yz + zx + xy)$ となり、

$$yz + zx + xy = -\tfrac{1}{2},$$

を得る。これが示すべきことであった。

$\sum x^2y$ の値、そして xyz の値

（ある変数の2乗）×（それとは別の変数）の形をした6つの項すべての和を $T = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$ とおく。S_2 と S_1 を掛けると9つの項が現れる。3つの3乗の項と、T を構成する6つの項である：

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = (x^3 + y^3 + z^3) + T.$$

よって $2 \times 1 = 3 + T$ であり、

$$T = -1,$$

となる。これが2つ目の結果である。

考えてみよう 既知の量のどのような積が、T と xyz の両方を含むだろうか？

$(x + y + z)(yz + zx + xy)$ を考えてみよう。展開すると9つの項が現れる。そのうち6つは $x \cdot xy = x^2y$ の形をしており、これらはちょうど T の6つの項である。残りの3つは $x \cdot yz$、$y \cdot zx$、$z \cdot xy$ であり、いずれも xyz に等しい。したがって

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = T + 3xyz.$$

既知の値を代入すると $1 \times (-\frac{1}{2}) = -1 + 3xyz$ となるので、$3xyz = \frac{1}{2}$ であり、

$$xyz = \frac{1}{6},$$

を得る。これが示すべきことであった。

漸化式

これで $e_1 = 1$、$e_2 = -\frac{1}{2}$、$e_3 = \frac{1}{6}$ がわかった。

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = t^3 - t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{6},$$

であるから、x、y、z はいずれもこの3次方程式の解である。特に

$$x^3 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6},$$

が成り立ち、y と z についても同様である。両辺に x^{n-2} を掛けると

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{6}x^{n-2},$$

となり、x を y や z に置き換えても同じ式が成り立つ。これら3つの式を足し合わせると、

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{6}S_{n-2},$$

となるので、

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{2}, \qquad c = \frac{1}{6}.$$

考えてみよう 「すべての n について」という条件は、負のべき乗に関して何か問題を生じるだろうか？

$n \geq 2$ のときは、x^{n-2} を掛けても何の問題もない。それより小さい n に対しては x、y、z の負のべき乗が必要になるが、これらはいずれも 0 でないので負のべき乗は存在する。実際、それらの積は $\frac{1}{6} \neq 0$ である。したがって、この関係式はすべての整数 n について成り立つ。（x、y、z がすべて実数でなくても成り立つ。そして実際、すべてが実数というわけではない。この 3 次方程式は約 1.431 という実数解を 1 つと、互いに共役な 2 つの複素数解をもつ。）

検算

- $n = 2$ のとき、$S_0 = 3$ を用いれば、漸化式は与えられたデータを再現するはずである。実際、$S_2 + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{6}S_0 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 = S_3$ である。
- 漸化式によれば $S_4 = 3 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$、$S_5 = \frac{25}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = 6$ となる。3 次方程式を数値的に解き（解は 1.43085 と $-0.21542 \pm 0.26471\,\mathrm{i}$）、4 乗と 5 乗の和を計算すると 4.16667 と 6.00000 となり、一致する。同じ解は負の n に対しても漸化式を満たす。

よくある間違い

- 3 次方程式の符号を間違える。正しくは $t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3$ であり、ここでは $b = -e_2 = +\frac{1}{2}$、$c = e_3 = \frac{1}{6}$ となる。
- $n = 2$ で漸化式を確かめる際に、$S_0 = 3$ であって 1 ではないことを忘れる。

STEP のその先へ

これらはニュートン（Newton）の恒等式であり、任意の個数の変数について、べき和と基本対称式を結びつけるものである。その背後には**対称式の基本定理**（fundamental theorem of symmetric polynomials）がある。すなわち、$x_1, \ldots, x_k$ のどのような対称式も $e_1, \ldots, e_k$ の多項式として表せる、という定理である。S_n の漸化式は線形漸化式であり、その特性方程式（characteristic equation）はこの 3 次方程式そのものである。これは線形差分方程式（linear difference equations）を解き、フィボナッチ（Fibonacci）数列の一般項の公式を与えるのと同じ考え方である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、このような精神で多項式とその解を論じている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。