解答例

STEP III 2009、第 4 問

純粋数学 ・ ラプラス変換

> **STEP III 2009、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q4

鍵となる考え方

小問 (i)–(iii) は、いずれも定義の積分に微積分を 1 行適用するだけで済む。(i) は 2 つの指数関数をまとめるだけであり、(ii) は置換積分、(iii) は部分積分（integration by parts）である。小問 (iv) は部分積分を 2 回行っても解けるが、(iii) を 2 回使い、sin と cos の変換が互いを決定し合うようにするほうがすっきりする。最後の小問では、目標の $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ を 3 段階 $\sin t \to \cos t \to \cos qt \to \mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ で組み立てられるものと考える。各段階はそれぞれ 4 つの結果のうちの 1 つである。

解答

関数 g のラプラス変換（Laplace transform）を $\mathcal{L}[g](s)$ と書く。したがって $F = \mathcal{L}[f]$ である。「適切な」とは積分が収束することを意味する。特に、$s > 0$ に対して $t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$ となることを仮定する。

小問 (i)

指数関数をまとめると、

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-bt}f(t)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-bt}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+b)t}f(t)\,\mathrm{d}t = F(s+b),$$

となり、これは F の定義に $s+b$ を代入したものである。$s+b > 0$ であるから、これは正当である。

小問 (ii)

$u = at$ と置換すると、$t = u/a$、$\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$ である。$a > 0$ であるから積分区間の端 0 と ∞ は変わらず、

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s/a)u} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),$$

となる。ここでも $s/a > 0$ を用いた。

小問 (iii)

e^{-st} を微分し、$f'(t)$ を積分する形で部分積分を行う。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \left[\mathrm{e}^{-st} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)\mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (0 - f(0)) + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= sF(s) - f(0),\end{aligned}$$

ここで、上端の項が消えるのは $t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-st} f(t) \to 0$ となるからである（これは f が適切であることの一部である）。

小問 (iv)

$S(s) = \mathcal{L}[\sin t](s)$、$C(s) = \mathcal{L}[\cos t](s)$ とおく。$|\mathrm{e}^{-st}\sin t| \le \mathrm{e}^{-st}$ であり、cos についても同様であるから、$s > 0$ のときどちらの積分も収束する。また、$\mathrm{e}^{-st}\sin t$ と $\mathrm{e}^{-st}\cos t$ はともに 0 に収束（converge）するので、それぞれに (iii) が適用できる。

導関数が cos で、$\sin 0 = 0$ である $f = \sin$ に (iii) を適用すると、

$$C(s) = sS(s).$$

導関数が $-\sin$ で、$\cos 0 = 1$ である $f = \cos$ に (iii) を適用すると、

$$-S(s) = sC(s) - 1.$$

（定数倍はそのまま積分の外に出せるので、$-\sin t$ の変換は $-S(s)$ である。）第 1 式を第 2 式に代入すると、

$$-S(s) = s^2 S(s) - 1 \quad\Longrightarrow\quad (s^2+1)S(s) = 1 \quad\Longrightarrow\quad S(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

となり、示すべき式が得られた。副産物として、

$$C(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

最後の小問

考えてみよう　新たな積分を一切せずに、$\sin t$ を $\cos qt$ に変えるにはどうすればよいか。

微分は sin を cos に変え（これが (iii)）、t のスケールを変えると $\cos t$ が $\cos qt$ になり（これが (ii)）、指数関数を掛けることは (i) にあたる。そこで 3 段階で進める。

第 1 段階：$\cos t$。　$f(t) = \sin t$ として (iii) を用い、F には (iv) を使うと、

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = s \cdot \frac{1}{s^2+1} - \sin 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

（これは小問 (iv) の副産物である。）

第 2 段階：$\cos qt$。　$f(t) = \cos t$、$a = q > 0$ として (ii) を用いると、

$$\mathcal{L}[\cos qt](s) = \frac{1}{q} \cdot \frac{s/q}{(s/q)^2+1} = \frac{1}{q} \cdot \frac{sq}{s^2+q^2} = \frac{s}{s^2+q^2}.$$

第 3 段階：$\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$。　$f(t) = \cos qt$、$b = p > 0$ として (i) を用い、s を $s+p$ で置き換える。

$$\boxed{\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-pt}\cos qt](s) = \frac{s+p}{(s+p)^2+q^2}} \qquad (s > 0).$$

検算

- $p \to 0$、$q = 1$ とすると $s/(s^2+1)$ となり、第 1 段階で得た $\cos t$ の変換に一致する。$q \to 0$ とすると $1/(s+p)$ となり、実際 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+p)t}\,\mathrm{d}t = 1/(s+p)$ である。
- $s \to \infty$ のとき $sF(s) \to 1 = \cos 0$ となり、そうなるべきである。s が大きいと重み $s\mathrm{e}^{-st}$ は $t = 0$ の近くに集中するので、$sF(s)$ は関数の 0 での値に近づくからである。
- 数値的には、$s = 1$、$p = \frac{1}{2}$、$q = 2$ のとき公式は $1.5/6.25 = 0.24$ を与え、積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した値と一致する。コンピュータで (i)–(iv) と最終結果をランダムなパラメータ値で検証し、誤差は 10^{-12} 以内であった。

よくある間違い

- (ii) で、$\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$ から生じる因子 $1/a$ を忘れる。あるいは $F(s/a)$ ではなく $F(as)$ と書いてしまう。
- 第 3 段階で、一部の s しかずらさない。**すべての** s が $s+p$ になるので、分子は s ではなく $s+p$ である。
- (iii) で $f(0)$ の符号を誤る。境界項は $0 - f(0)$ である。

STEP のその先へ

これらの法則は、微分方程式（differential equation）に対するラプラス変換法の原動力である。(iii) は微分を s の掛け算に変えるので、定数係数の線形常微分方程式は $F(s)$ についての代数方程式になる。それを解き、ここで得たような結果から作った表で「引く」のである。シフト法則 (i) こそが、減衰振動 $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ が $s = -p \pm \mathrm{i}q$ における極（pole）として現れる理由である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）には、この方法について丸ごと 1 章が割かれている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。