解答例

STEP III 2009、第 3 問

純粋数学 • 極限と曲線の概形

> **STEP III 2009、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q3

鍵となる考え方

この関数が $t = 0$ で定義されないのは 0/0 になるからにすぎないので、べき級数（power series）を使えば、そこで本来「とるべき」値がわかる。小問 (ii) はすべてを通分（common denominator）するだけの問題であり、現れる偶関数（even function）は実は $\frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$ が姿を変えたものである。小問 (iii) では、$f'(t)$ の符号は分子だけで完全に決まり、その分子がちょうど $\mathrm{e}^t(1-t)-1$ になっている。不等式が問題に含まれているのはそのためである。

解答

小問 (i)

$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots$ を用いると、$t \neq 0$ のとき因数 t を約分できる：

$$f(t) = \frac{t}{t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \cdots} \longrightarrow 1 \quad \text{ただし} t \to 0,$$

分母が 1 に収束するからである。したがって $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$ である。

商の微分法（quotient rule）により、

$$f'(t) = \frac{(\mathrm{e}^t - 1) - t\,\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}.$$

分子も分母も 0 に収束するので、それぞれを展開する。分子は

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^t - 1 - t\,\mathrm{e}^t &= (t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots) - (t + t^2 + \tfrac{1}{2}t^3 + \cdots) \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 + \cdots,\end{aligned}$$

であり、分母は $(t+\frac{1}{2}t^2+\cdots)^2 = t^2(1+\frac{1}{2}t+\cdots)^2$ である。分子と分母を t^2 で割ると、

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t+\cdots}{(1+\frac{1}{2}t+\cdots)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{ただし} t \to 0.$$

小問 (ii)

$g(t) = f(t) + \frac{1}{2}t$ とおく。通分すると、

$$g(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{2t + t(\mathrm{e}^t - 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t + 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)}.$$

ここで t を $-t$ に置き換え、分子と分母に e^t を掛けると：

$$g(-t) = \frac{-t\,(\mathrm{e}^{-t} + 1)}{2(\mathrm{e}^{-t} - 1)} = \frac{-t\,(1 + \mathrm{e}^t)}{2(1 - \mathrm{e}^t)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t + 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)} = g(t).$$

よって、求めるとおり $f(t) + \frac{1}{2}t$ は偶関数である。（分子と分母を $\mathrm{e}^{t/2}$ で割ると $g(t) = \frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$ となり、これは二つの奇関数（odd function）の積である。これも別の見方である。）

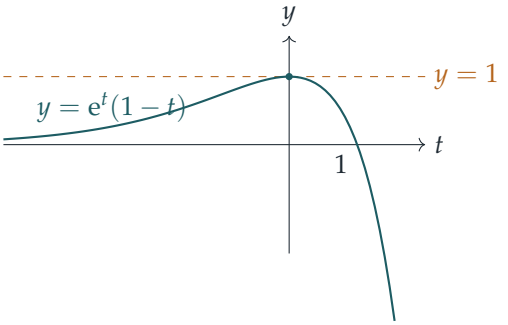
グラフを描くうえで役に立つ帰結がある：$f(t) - f(-t) = -t$ なので、f のグラフは偶関数のグラフを直線 $y = -\frac{1}{2}t$ に沿って傾けたものである。

小問 (iii)

$h(t) = \mathrm{e}^t(1-t)$ とおく。すると

$$h'(t) = \mathrm{e}^t(1-t) - \mathrm{e}^t = -t\,\mathrm{e}^t,$$

であり、これは $t < 0$ で正、$t > 0$ で負である。したがって h は $t = 0$ まで増加し、その後は減少する。ただ一つの停留点（stationary point）は極大（maximum）であり、$h(0) = 1$ である。また、$t \to -\infty$ のとき $h(t) \to 0$ であり、$t > 1$ では $h(t) < 0$ である。



この曲線は $t=0$ で $y=1$ に接し、それ以外ではいたるところで厳密にその下側にある。よって

$$e^t(1-t) \le 1, \quad \text{ただし等号成立は} t=0.$$

考えてみよう この不等式から $f'(t)$ について何がわかるのだろうか？

小問 (i) で求めた $f'(t)$ の分子をもう一度見てみよう：

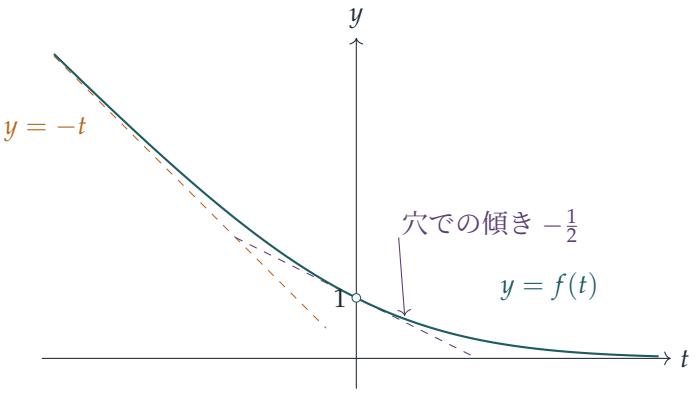
$$e^t - 1 - te^t = e^t(1-t) - 1.$$

上の厳密な不等式により、$t \neq 0$ のときこれは厳密に負である。分母 $(e^t-1)^2$ は $t \neq 0$ のとき厳密に正である。したがって、すべての $t \neq 0$ に対して $f'(t) < 0$ である。特に $f'(t) \neq 0$ なので、f は停留点をもたず、0 の両側でそれぞれ減少する。

f のグラフ

事実をまとめよう。

- t と $e^t - 1$ は同符号なので、すべての $t \neq 0$ に対して $f(t) > 0$ である。
- 0 の近くでは、グラフは傾き $-\frac{1}{2}$ で $(0,1)$ に近づく（小問 (i)）。$f(0)$ は定義されないので、その点自体は抜けている。
- f は全体で減少する（小問 (iii)）。
- $t \to \infty$ のとき、指数関数が t より速く増大するので、$f(t) = t/(e^t-1) \to 0^+$ である。
- $t \to -\infty$ のとき $f(t) + t = \dfrac{te^t}{e^t-1} \to 0$ なので、$y=-t$ は斜めの漸近線（oblique asymptote）である。これは小問 (ii) からも従う：$f(t) = f(-t) - t$ かつ $f(-t) \to 0$ である。



検算

- 小問 (ii) からは $f(-1) - f(1) = 1$ が予想される。数値的には $f(1) = 1/(\mathrm{e}-1) \approx 0.58198$、$f(-1) = \mathrm{e}/(\mathrm{e}-1) \approx 1.58198$ であり、差はちょうど 1 である。
- 導関数の式を $t = \pm 10^{-4}$ で評価すると -0.49998 と -0.50002 になり、極限 $-\frac{1}{2}$ と矛盾しない。
- coth の形から、小さい t に対して $g(t) \approx 1 + \frac{1}{12}t^2$ となるので、$f(t) \approx 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2$ であり、小問 (i) の二つの極限の両方と一致する。

よくある間違い

- $f'(t)$ にロピタルの定理（L'Hôpital's rule）を一度だけ使い、再び $0/0$ が現れたところで止まってしまう。分子と分母をともに t^2 の次数まで展開すれば、これは避けられる。
- $\mathrm{e}^t(1-t) \le 1$ だけを証明して、$f'(t) \neq 0$ だと主張してしまう。$t \neq 0$ に対して不等式が**厳密**であることが必要であり、それは $t = 0$ が h のただ一つの停留点であることから得られる。
- グラフを $(0,1)$ を通る塗りつぶした点で描いてしまう：f はそこで定義されていない。

STEP のその先へ

展開 $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n \ge 0} B_n \dfrac{t^n}{n!}$ によってベルヌーイ数（Bernoulli numbers）B_n が定義される。小問 (i) は $B_0 = 1$ と $B_1 = -\frac{1}{2}$ を示しており、小問 (ii) はすべての奇数 $n \ge 3$ に対して $B_n = 0$ であることを示している。これらの数は、オイラー（Euler）–マクローリン（Maclaurin）の和公式、べき乗の和 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$、そして $\sum 1/n^{2k}$ に関するオイラーの公式に現れる。$t = 0$ にあるような「穴」を取り除くことは、除去可能な特異点（removable singularity）という考え方である。極限と連続性（continuity）の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。