解答例

STEP III 2009、第 2 問

純粋数学 • べき級数解

> **STEP III 2009、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q2

鍵となる考え方

y が冪級数（power series）ならば、y'、y''、x^3y もまた冪級数であり、微分方程式（differential equation）は、それらを合わせた一つの冪級数が恒等的にゼロであることを述べている。すべての x に対して消える冪級数は係数（coefficient）がすべてゼロであるから、微分方程式は a_n どうしを結ぶ簡単な方程式の一覧に変わる。本当の作業は帳簿づけである。係数を比較する前に添字をずらし（shift indices）、すべての級数を x の同じ冪で表しておくのである。

解答

小問 (i)

項別微分（term-by-term differentiation）を行うと（すべての級数が収束することは与えられているので、これは許されるものとする）、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n x^n) = n a_n x^{n-1}.$$

$n = 0$ の項 a_0 は定数であり、その導関数は 0 であるから、和は $n = 1$ から始まる：

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

これが求める結果である。同じことをもう一度行うと、y' の $n = 1$ の項 a_1 は定数なので、

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

a_3 まで書き出すと：

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \cdots.$$

小問 (ii)

$xy'' - y' + 4x^3y$ の各項を x^{n-1} の級数として書く。まず、

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}.$$

この和の $n = 1$ の項は $1 \cdot 0 \cdot a_1 = 0$ となるので、これも $n = 1$ から始めてよい。すると

$$xy'' - y' = \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1) - n]a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-2)a_n x^{n-1}.$$

最後の項については $4x^3y = \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m x^{m+3}$ であり、$m = n - 4$ とおくと冪は x^{n-1} となる：

$$4x^3y = \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4}\, x^{n-1}.$$

考えてみよう そもそもなぜ係数を比較できるのか？

方程式は、級数が収束する区間内のすべての x に対して $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ が成り立つことを述べているので、合わせた冪級数はその区間でゼロ関数である。収束する冪級数が区間上でゼロになるのは、すべての係数がゼロであるときに限る（$x = 0$ を代入して定数項を求め、x で割り、これを繰り返せばよい）。したがって、x の各冪の係数はゼロでなければならない。

各係数は次の通りである：

- x^0（$n = 1$）：$1 \cdot (-1)\, a_1 = 0$ より $a_1 = 0$ であり、求める通りである。
- x^1（$n = 2$）：$2 \cdot 0 \cdot a_2 = 0$ は自動的に成り立つので、a_2 は自由に選べる。
- x^2（$n = 3$）：$3 \cdot 1 \cdot a_3 = 0$ より $a_3 = 0$ である。
- $n \geq 4$ に対する x^{n-1}：$n(n-2)a_n + 4a_{n-4} = 0$。

$n \geq 4$ では $n(n-2) \neq 0$ なのでこれで割ることができ、

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}\, a_{n-4} \qquad (n \geq 4),$$

が得られ、求める結果となる。（a_0 もまた自由である。それ単独に関わる方程式が存在しないからである。）

$a_0 = 1, a_2 = 0$ の場合。 漸化式（recurrence）は a_n を a_{n-4} にのみ結びつけるので、係数は n を 4 で割った余りに応じて四つの鎖に分かれる。$a_1 = 0$、$a_2 = 0$、$a_3 = 0$ から始まる鎖はすべてゼロなので、ゼロでない可能性があるのは a_{4k} のみである。$k \geq 1$ として $n = 4k$ とおくと、

$$a_{4k} = -\frac{4}{4k(4k-2)}\, a_{4k-4} = -\frac{1}{2k(2k-1)}\, a_{4k-4}.$$

$a_0 = 1$ から出発すると、各段階で -1 を掛け、階乗の次の二つの因数で割ることになるので、

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

（確認：$a_4 = -\frac{1}{2}$、$a_8 = -\frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$。）よって

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \cos(x^2),$$

これはマクローリン級数（Maclaurin series）$\cos u = \sum_k (-1)^k u^{2k}/(2k)!$ に $u = x^2$ を代入したものである。これが求める結果である。

$a_0 = 0, a_2 = 1$ の場合。 今度は a_0、a_1、a_3 から始まる鎖がすべてゼロであり、残るのは a_{4k+2} のみである。$k \geq 1$ として $n = 4k + 2$ とおくと、

$$a_{4k+2} = -\frac{4}{(4k+2)\,4k}\, a_{4k-2} = -\frac{1}{(2k+1)\,2k}\, a_{4k-2},$$

であり、$a_2 = 1$ から $a_{4k+2} = (-1)^k/(2k+1)!$ が得られる。したがって

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x^2).$$

検算

直接代入する。$y = \sin(x^2)$ に対して $y' = 2x\cos(x^2)$、$y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$ なので

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 2x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) - 2x\cos(x^2) + 4x^3\sin(x^2) = 0.$$

$\cos(x^2)$ についても同様である。数値的には、$x = 1.2$ における余弦の級数の最初の 40 項から 0.1304237… が得られ、$\cos(1.44)$ と一致する。また、どちらの答えも $x = 0$ で辻褄が合う。$\cos 0 = 1 = a_0$ であり、0 の近くで $\sin(x^2) \approx x^2$ となるので $a_2 = 1$ である。

よくある間違い

- 添字をずらす前に係数を比較してしまい、ある級数の a_n と別の級数の a_n を、異なる x の冪に掛かっているにもかかわらず対応させてしまう。
- $a_3 = 0$ を忘れる。これは鎖 $a_3, a_7, a_{11}, \ldots$ を消すために必要である。
- $n \geq 4$ で $n(n-2)$ がゼロでないことに触れずに割ってしまう。$n = 2$ ではこれはゼロであり、まさにそれが a_2 が自由である理由である。

STEP のその先へ

これは最も単純な形のフロベニウス（Frobenius）の方法である。点 $x = 0$ では y'' の係数が消えるので、そこはこの方程式の**確定特異点**（regular singular point）であり、一般論によって、通常の冪級数一つでうまくいかないこともあるのに、なぜここではうまくいくのかが説明される（決定方程式の根（indicial roots）である 0 と 2 は整数だけ異なる）。同じ方法でベッセル（Bessel）関数やルジャンドル（Legendre）関数が得られる。項別微分を正当化するには一様収束（uniform convergence）が必要であり、これは大学 1 年次の解析学（analysis）で学ぶ内容である。どちらの考え方についても、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*、および Abbott, *Understanding Analysis* を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。