解答例

STEP III 2009、第 12 問

確率・統計 ・ 確率母関数

> **STEP III 2009、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q12

鍵となる考え方

小問 (i) では、投げるたびに硬貨の枚数の期待値は半分になるが、投げる回数そのものが確率変数であるため、それを条件として固定する。直前の枚数が与えられれば、次の枚数は二項分布（binomial distribution）に従い、その平均は容易に求まる。これにより期待値は等比数列（geometric sequence）となる。小問 (ii) では、合計は独立同分布（independent, identically distributed）な部分の和であり、確率母関数（probability generating function）を用いると「独立な確率変数の和」が「母関数の積」に変わる。

解答

小問 (i)

各回の投げは独立に確率 $\frac{1}{2}$ で表が出るので、$X_1 \sim \mathrm{B}(k, \frac{1}{2})$ であり、

$$\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{2}k.$$

$X_1 = x_1$ が与えられたとき、Albert は新たに独立な x_1 回の投げを行うので、$X_2 \mid X_1 = x_1 \sim \mathrm{B}(x_1, \frac{1}{2})$ であり、

$$\mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}x_1.$$

（$x_1 = 0$ のときは一度も投げず $X_2 = 0$ となり、これと一致する。）X_1 のとりうる値について平均をとると、全期待値の法則（law of total expectation）により

$$\mathrm{E}(X_2) = \sum_{x_1=0}^{k} \mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1)\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\sum_{x_1=0}^{k} x_1\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{4}k,$$

となり、示すべき式が得られる。

考えてみよう なぜ単に「X_2 は $\mathrm{B}(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2})$ に従う」と言えないのか。

2 回目に投げる回数は確率変数 X_1 であって、数 $\frac{1}{2}k$ ではないからである。実際、$\frac{1}{2}k$ は整数であるとも限らない。X_1 を条件とすることで投げる回数が固定され、そこで初めて二項分布の平均が使えるのである。

まったく同じ議論が各段階で成り立つ。$X_i = x_i$ が与えられたとき $X_{i+1} \sim \mathrm{B}(x_i, \frac{1}{2})$ であるから、$\mathrm{E}(X_{i+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X_i)$ となる。数学的帰納法（induction）により

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{k}{2^i} \qquad (i \geq 1),$$

であり、公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数（geometric series）を足し合わせると

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_i) = k\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots\right) = k.$$

小問 (ii)

1 枚の硬貨について、$Y_i = n$ とは n 回表が出たのちに裏が出ることを意味するので、

$$\mathrm{P}(Y_i = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

その確率母関数は等比級数であり、$|t| < 2$ で収束（converge）する。

$$G_{Y_i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} t^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2 - t}.$$

k 枚の硬貨は別々に投げられるので $Y_1, \ldots, Y_k$ は独立であり、独立な確率変数の和の母関数はそれぞれの母関数の積である。したがって

$$G_Y(t) = \mathrm{E}(t^{Y_1 + \cdots + Y_k}) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{E}(t^{Y_i}) = (2 - t)^{-k}.$$

平均と分散。 微分すると

$$G_Y'(t) = k(2 - t)^{-k-1}, \qquad G_Y''(t) = k(k+1)(2 - t)^{-k-2},$$

であるから、$G_Y'(1) = k$、$G_Y''(1) = k(k+1)$ である。よって

$$\mathrm{E}(Y) = G_Y'(1) = k,$$

であり、さらに $G_Y''(1) = \mathrm{E}(Y(Y-1))$ であるから、分散（variance）は

$$\mathrm{Var}(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - (G_Y'(1))^2 = k(k+1) + k - k^2 = 2k.$$

分布。 $\mathrm{P}(Y=r)$ は $G_Y(t)$ における t^r の係数である。

$$G_Y(t) = 2^{-k}\left(1-\tfrac{1}{2}t\right)^{-k},$$

と書き、負の指数に対する二項級数（binomial series）（$|t|<2$ で有効）を用いる。

$$(1-x)^{-k} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}x^r.$$

（係数は $\dfrac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}$ であり、これは $\binom{k+r-1}{r}$ に等しい。）$x=\frac{1}{2}t$ とおくと

$$\mathrm{P}(Y=r) = \binom{k+r-1}{r}\frac{1}{2^{k+r}}, \qquad r=0,1,2,\ldots$$

考えてみよう この公式を直接見てとる方法はあるだろうか。

ある。すべての投げを 1 本の長い列に並べて考える。$Y=r$ とは、k 回目の裏が $k+r$ 回目の投げで出ることを意味する。長さ $k+r$ の特定の投げの列が起こる確率は $2^{-(k+r)}$ であり、最後の投げは裏でなければならないので、最初の $k+r-1$ 回のうちどの r 回が表であるかを選ぶだけでよい。その選び方は $\binom{k+r-1}{r}$ 通りである。これが負の二項分布（negative binomial distribution）である。

検算

- $k=1$ のとき $\mathrm{P}(Y=r)=2^{-(r+1)}$ となり、硬貨 1 枚の幾何分布（geometric distribution）である。また $\mathrm{E}(Y)=1$、$\mathrm{Var}(Y)=2$ であり、0 から数えた $p=\frac{1}{2}$ の幾何分布に従う確率変数についてよく知られた値と一致する。
- $G_Y(1)=1$ であり、これはすべての母関数が満たすべき性質である。
- $k=2$ のとき、$\mathrm{P}(Y=0)=\frac{1}{4}$（最初の 2 回がともに裏）であり、$\mathrm{P}(Y=1)=\binom{2}{1}\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$（一方の硬貨が表のあと裏、もう一方が裏。順序は 2 通りで、それぞれ $\frac{1}{8}$）である。
- 分数による厳密な計算により、$k\le 7$ かつ $i<40$ について $\mathrm{E}(X_i)=k/2^i$ であること（したがって部分和が k に近づくこと）、および $k\le 6$ について $\mathrm{P}(Y=r)$ の公式、平均 k、分散 $2k$ が確認された。

よくある間違い

- 最後の裏を忘れて $\mathrm{P}(Y_i=n)=(\frac{1}{2})^n$ としてしまう。このとき確率の和は 2 になってしまう。

- $\mathrm{Var}(Y) = G''(1) - \big(G'(1)\big)^2$ を用いてしまう。これは $G'(1)$ の項が抜けており、$2k$ ではなく k が得られてしまう。
- 係数を $\binom{k+r}{r}$ と書いてしまう。最後の投げは裏に固定されているので、自由に決まるのは $k+r-1$ 回だけである。

STEP のその先へ

小問 (i) は分枝過程（branching process）である。各「個体」（表）は次の世代に確率的な数の「子孫」をもち、ここではその数は $\mathrm{B}(1, \frac{1}{2})$ に従う。子孫の数の平均が 1 より小さいので、個体群は絶滅する。条件付けの段階 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_{i+1} \mid X_i)\big)$ はタワー性（tower property）と呼ばれ、大学 1 年次の講義では、X_i の母関数が子孫の母関数を i 回合成したものになることが示される。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数と分枝過程の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。