解答例

STEP III 2009、第 11 問

力学 ・ 質量が変化する物体の運動

> **STEP III 2009、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q11

鍵となる考え方

質量が変化する場合、$F = ma$ は正しい法則ではない。力 = 運動量（momentum）の時間変化率、という法則を用いなければならない。塵は静止しているので、それ自身の運動量をもち込むことはなく、彗星の運動量 $M(1+bx)v$ は外力（external force）によってのみ変化する。このことから、ただちに第一積分（first integral）が得られる。さらに $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と書けば、これは変数分離形（separable）の微分方程式となり、その解は x の 2 次式で表される。

解答

彗星を質点（particle）としてモデル化する。彗星が集める塵は静止していたので、彗星に運動量をもち込むことはない。したがって、系（彗星と集めた塵）にはたらく力は、運動の向きにはたらく重力 Mf のみである。

小問 (i)

$f = 0$ のとき外力ははたらかないので、運動量は保存される。進入時の運動量は MV であり、時刻 t における運動量は $M(1+bx)v$ である。よって

$$(1+bx)\,v = V.$$

ここで $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とおいて変数を分離すると、

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t V\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = Vt,$$

となる。ただし $t = 0$ のとき $x = 0$ であることを用いた。したがって $bx^2 + 2x - 2Vt = 0$ であり、$x \geq 0$ であるから、平方根の符号が正である解をとる必要がある：

$$x = \frac{\sqrt{1 + 2bVt} - 1}{b}.$$

小問 (ii)

今度は外力が Mf であるから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M(1 + bx)v] = Mf.$$

M と f は定数なので、0 から t まで積分すると $M(1 + bx)v - MV = Mft$ を得る（$t = 0$ のとき $x = 0$、$v = V$ である）。したがって

$$v = \frac{ft + V}{1 + bx},$$

となり、示すべき式が得られた。

? **考えてみよう** なぜ単に $M(1 + bx)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mf$ と書いてはいけないのだろうか。

その式では、新たに加わる塵の一粒一粒を静止状態から速さ v まで加速するのに必要な運動量が無視されてしまう。積の微分法（product rule）を使うと違いがわかる。運動量の時間変化率は $M(1 + bx)\dot{v} + Mb\dot{x}\,v$ であり、第 2 項こそがその「追いつかせる」ためのコストである。

小問 (i) と同様に $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と書いて変数を分離すると、

$$\int_0^x (1 + bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t (fs + V)\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = \tfrac{1}{2}ft^2 + Vt.$$

よって $bx^2 + 2x - (ft^2 + 2Vt) = 0$ であり、再び非負の解をとると

$$x = \frac{\sqrt{1 + bft^2 + 2bVt} - 1}{b}.$$

（$f = 0$ とおけば小問 (i) の結果に戻る。）

一定の速さ。彗星が一定の速さ V で運動するのは、すべての t について $x = Vt$ となるとき、すなわち $\sqrt{1 + bft^2 + 2bVt} = 1 + bVt$ となるときであり、またそのときに限る。両辺を 2 乗すると、

$$1 + bft^2 + 2bVt = 1 + 2bVt + b^2V^2t^2 \quad \text{任意の} t,$$

が必要であり、これが成り立つのはちょうど $f = bV^2$ のときである。このとき $v = \dfrac{bV^2t + V}{1 + bVt} = V$ となるので、この選び方のもとで彗星は確かに一定の速さで運動

する。重力の引力が、掃き集めた塵を加速するのに必要な運動量をちょうど供給しているのである。

極限の速さ。一般には、x の式から得られる $1+bx=\sqrt{1+bft^2+2bVt}$ を用いると、

$$v=\frac{ft+V}{\sqrt{1+2bVt+bft^2}}=\frac{f+V/t}{\sqrt{bf+2bV/t+1/t^2}}\longrightarrow\frac{f}{\sqrt{bf}}=\sqrt{\frac{f}{b}}\quad\text{極限}t\to\infty,$$

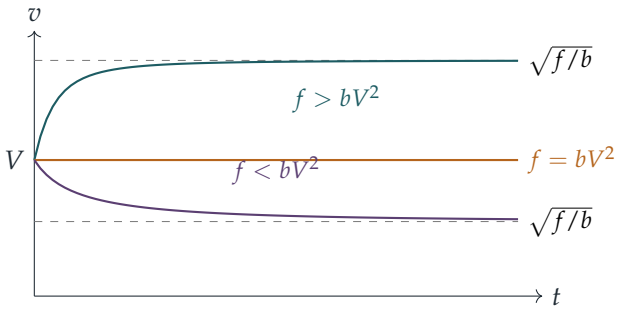
となる。ここで分子と分母を $t>0$ で割り、$bf>0$ であることを用いた（力は運動の向きにはたらくので、$f>0$ でなければならない）。したがって、速さは定数 $\sqrt{f/b}$ に収束（converge）する。

考えてみよう これは速さが一定の場合と矛盾しないだろうか。

矛盾しない。$f=bV^2$ ならば $\sqrt{f/b}=V$ であり、これは彗星が最初からずっともっていた速さである。実際、v^2 を微分すると

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}=\frac{2(ft+V)(f-bV^2)}{(1+2bVt+bft^2)^2},$$

となるので、速さは $f>bV^2$ ならば $\sqrt{f/b}$ に向かって単調に増加し、$f<bV^2$ ならば単調に減少してそこに近づき、$f=bV^2$ ならば V のまま変わらない。



検算

- 単位：b の単位は 1/長さ であり、f は加速度であるから、f/b の単位は速さの 2 乗となり、$\sqrt{f/b}$ は速さである。また bft^2 と bVt は無次元（dimensionless）であり、平方根の中身として当然そうあるべきである。
- $b=1$、$V=1$、$f=3$ として、方程式 $\dot{x}=p/(1+bx)$、$\dot{p}=f$ を数値的に時間発展させると、x と v の式と小数第 8 位まで一致し、$t=10^6$ における速さは $1.7320508\ldots\approx\sqrt{3}$ となる。
- $b\to0$（塵がない場合）とすると、$x=\left(\sqrt{1+bft^2+2bVt}-1\right)/b\to\frac{1}{2}ft^2+Vt$ となり、おなじみの等加速度運動の結果が得られる。

よくある間違い

- 質量が変化している物体に対して (質量) $\times \dot{v} =$ 力 を用いてしまう。
- 2 次方程式の負の解をとってしまい、$x < 0$ となる。
- 運動量の方程式を積分するときに、積分定数（constant of integration）MV を忘れる。

STEP のその先へ

可変質量（variable mass）の問題は、大学 1 年で学ぶ古典的なテーマである。同じ運動量の収支計算からロケット方程式（rocket equation）が導かれ、雲の中を落下しながら成長する雨粒を考えると、これとよく似た方程式が現れる。極限の速さ $\sqrt{f/b}$ は終端速度（terminal velocity）であり、そこでは力が、新たな質量に費やされる運動量の割合とちょうどつり合っている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、可変質量の系を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。