解答例

STEP III 2009、第 10 問

力学 ・ 単振動

STEP III 2009、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s3-q10

鍵となる考え方

平衡（equilibrium）における縮み d は、ばねの硬さ（stiffness）を名指しせずに教えてくれるために与えられている。平衡状態ではばねの力が重力とつり合うので、$k/m = g/d$ である。その後はニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）により、平衡位置を中心とする単振動（simple harmonic motion）が得られ、落下の高さ h は初速度を通してのみ関わってくる。粒子がばねから離れるのは、ばねがもはや粒子を押せなくなるときであり、それは縮みが再び 0 に戻るときに起こる。

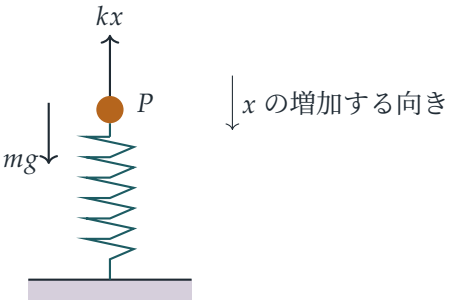
解答

微分方程式

P を質量 m の質点とみなし、ばねは質量が無視でき、ばね定数 k のフックの法則（Hooke's law）に従うものとし、空気抵抗は無視する。P がばねの上に静止しているとき、P にはたらく力は下向きの重力 mg と上向きのばねの力 kd であるから、

$$kd = mg, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{k}{m} = \frac{g}{d}.$$

次に、落下させる場合を考える。x を下向きに測り（これは縮みである）、衝突の瞬間を $t = 0$ とする。P がばねと接触している間、P にはたらく力は図のとおりである。



ばねは軽いので、ばねが P に及ぼす力はちょうど上向きに kx である（軽いばねは両端で同じ大きさの力を伝える）。下向きを正としてニュートンの運動の第 2 法則を用いると $m\ddot{x} = mg - kx$ となるので、

$$\ddot{x} + \frac{g}{d}x = g, \qquad 0 \le t \le T.$$

方程式を解く

これは $x = d$ を中心とする単振動であり、

$$\omega = \sqrt{g/d}.$$

特解（particular solution）は定数 $x = d$ であり、余関数（complementary function）は $B\cos\omega t + C\sin\omega t$ であるから、一般解（general solution）は

$$x = d + B\cos\omega t + C\sin\omega t.$$

初期条件（initial conditions）は落下から定まる。$t = 0$ ではばねに触れた直後なので $x(0) = 0$ である。また P は高さ h だけ自由落下しているので、その速さは $\sqrt{2gh}$ で向きは下向き、すなわち x が増加する向きである。したがって

$$\begin{aligned} x(0) &= d + B = 0 && \Rightarrow \quad B = -d, \\ \dot{x}(0) &= C\omega = \sqrt{2gh} && \Rightarrow \quad C = \sqrt{2gh}\,\sqrt{d/g} = \sqrt{2hd}. \end{aligned}$$

よって

$$x = d - d\cos\omega t + \sqrt{2hd}\,\sin\omega t, \qquad A = d, \quad B = -d, \quad C = \sqrt{2hd}, \quad \omega = \sqrt{g/d}.$$

離れる時刻

? **考えてみよう** P が接触を失うのは正確にはいつか？

ばねは P に固定されていないので、押すことはできても引くことはできない。P にはたらく接触力はばねの力 kx であり、これは $x > 0$ である間は正で、P が上向きに運動しながら x が再び 0 に戻ったときに 0 になる。その時点を越えて運動が続くとすれば、方程式はばねによる下向きの引く力を必要とするが、ばねはそのような力を与えられない。したがって T は $x = 0$ となる最初の正の時刻である。

これを求めるために、振動する部分を 1 つのコサインにまとめる。$R = \sqrt{d^2 + 2hd}$ とおき、鋭角 φ を

$$\cos\varphi = \frac{d}{R}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2hd}}{R},$$

で定める。このとき $\tan\varphi = \sqrt{2h/d}$ であり、$\varphi = \arctan\sqrt{2h/d}$ である。すると $d\cos\omega t - \sqrt{2hd}\sin\omega t = R\cos(\omega t + \varphi)$ であり、

$$x = d - R\cos(\omega t + \varphi).$$

よって $x = 0$ となるのは、ちょうど $\cos(\omega t + \varphi) = d/R = \cos\varphi$ のときである。t が 0 から増加するとき、角 $\omega t + \varphi$ は φ から始まり、区間 $\varphi < \omega t + \varphi < 2\pi - \varphi$ では $\cos(\omega t + \varphi) < \cos\varphi$ となるので、そこでは $x > 0$ である。最初に $\cos\varphi$ に戻るのは

$$\omega T + \varphi = 2\pi - \varphi, \qquad \text{すなわち} \qquad \omega T = 2\pi - 2\varphi.$$

のときである。$\omega = \sqrt{g/d}$ で割ると、

$$T = \sqrt{d/g}\left(2\pi - 2\arctan\sqrt{2h/d}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $h = 0$ のとき、粒子は自然長のばねの上に速さ 0 で置かれることになり、$\varphi = 0$、$T = 2\pi\sqrt{d/g}$ となる。これはちょうど 1 周期（period）であり、その後 P は速さ 0 で最上点に戻る。まさに正しい。
- $h \to \infty$ のとき、$\varphi \to \frac{\pi}{2}$ かつ $\omega T \to \pi$ となる。非常に速い粒子はばねの上でわずか半周期しか過ごさない。これは振幅（amplitude）に比べて平衡位置のずれ d が無視できるほど小さくなるからである。
- エネルギー保存（energy conservation）により、P は速さ $\sqrt{2gh}$ で離れるはずである。実際、$\dot{x}(T) = R\omega\sin(2\pi - \varphi) = -R\omega\sin\varphi = -\sqrt{2gh}$ である。
- 数値的に、$d = 0.1\,\mathrm{m}$、$h = 0.2\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として運動を逐次計算すると、接触時間は 0.411 s となり、公式と一致する。d と h に無作為な値を与えても、小数第 6 位まで一致する。

よくある間違い

- 平衡位置から測ってしまい、問題文の x が縮みであることを忘れて、$A = 0$ としてしまう。
- 初速度を $\sqrt{2gh}$ としながら符号を誤る。下向きが x の増加する向きである。
- 離れるのは平衡位置 $x = d$ である、あるいは半周期後であると思い込む。ばねは自然長に戻るまで押し続ける。

STEP のその先へ

これは**片側拘束**（unilateral constraint）の最も簡単な例である。ばねは押すことはできるが引くことはできない。運動は段階ごとに異なる微分方程式（differential equation）に従い、それらは位置と速度を一致させることによってつなぎ合わされる。ちょうどここで、自由落下の段階がばねの段階につなぎ合わされたのと同じである。同じ考え方は、衝突の理論や跳ね返る系の理論全体に通じている。振動子や、上の検算で用いたようなエネルギーを用いた方法についてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。