解答例

# STEP III 2009、第 1 問

純粋数学 • 円の座標幾何

**STEP III 2009、問 1**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

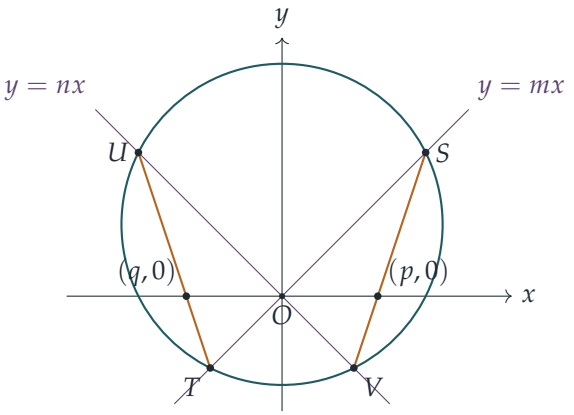
step.maths.org/questions/09-s3-q1

## 鍵となる考え方

4 点はすべて原点を通る直線上にあるので、各点はただ一つの数、すなわちその $x$ 座標で表される。円と直線 $y = mx$ の交点を求めると二次方程式（quadratic equation）が得られ、その 2 つの解が $s$ と $t$ である。解そのものは必要なく、必要なのはその和と積だけである。最後の恒等式は、$p + q$ の分子を $st$、$s + t$、$uv$、$u + v$ だけが現れるようにまとめることで得られる。

## 解答

以下では、$S$ と $T$ は直線 $y = mx$ 上に、$U$ と $V$ は直線 $y = nx$ 上にあり、どちらの直線も原点 $O$ を通るとする。$m \neq n$ を仮定する（そうでなければ 4 点はすべて一つの直線上にある）。また、$SV$ と $UT$ は水平ではなく、したがって $y = 0$ と交わるものとする。すなわち $ms \neq nv$ かつ $mt \neq nu$ である。



### 切片 $p$ と $q$

$S(s, ms)$ と $V(v, nv)$ を通る直線の傾き（gradient）は $\dfrac{nv - ms}{v - s}$ であるから、その直線上の点は

$$y - ms = \frac{nv - ms}{v - s}(x - s).$$

を満たす。$y = 0$、$x = p$ とおくと $p - s = -\dfrac{ms(v - s)}{nv - ms}$ となるので、

$$p = \frac{s(nv - ms) - ms(v - s)}{nv - ms} = \frac{nsv - msv}{nv - ms} = \frac{(m - n)sv}{ms - nv},$$

となり、求める式が得られた。（$v = s$ のときは直線 $SV$ は鉛直であり、$p = s$ となる。このときも公式は $\frac{(m-n)s^2}{(m-n)s} = s$ を与える。）

直線 $UT$ は、$y = mx$ 上の $T(t, mt)$ と $y = nx$ 上の $U(u, nu)$ を結ぶ。これは $SV$ が $S$ と $V$ を結ぶのとまったく同じ形である。$s$ を $t$ に、$v$ を $u$ に置き換えると、

$$q = \frac{(m - n)tu}{mt - nu}.$$

### $s$ と $t$ についての二次方程式

点 $(x, mx)$ が $x^2 + (y - c)^2 = r^2$ 上にあるのは、$x^2 + (mx - c)^2 = r^2$、すなわち

$$(1 + m^2)x^2 - 2mc\,x + c^2 - r^2 = 0.$$

が成り立つときであり、かつそのときに限る。$s$ と $t$ はどちらもこれを満たす。$S$ と $T$ を直線と円の 2 つの（異なる）交点とすれば、$s$ と $t$ はこの方程式の 2 つの解であるから、解と係数の関係（relations between roots and coefficients）より

$$st = \frac{c^2 - r^2}{1 + m^2}, \qquad s + t = \frac{2mc}{1 + m^2}.$$

### $p + q = 0$ の証明

直線 $y = nx$ について同じ議論を行うと、$u$ と $v$ は $(1 + n^2)x^2 - 2nc\,x + c^2 - r^2 = 0$ の解であることがわかるので、

$$uv = \frac{c^2 - r^2}{1 + n^2}, \qquad u + v = \frac{2nc}{1 + n^2}.$$

次に、2 つの切片（intercept）を通分して加える。

$$p + q = (m - n)\,\frac{sv(mt - nu) + tu(ms - nv)}{(ms - nv)(mt - nu)}.$$

**考えてみよう** $s,t,u,v$ の 4 つすべてを含む分子を、どうすれば扱いやすくできるだろうか？

分子を展開し、係数 $m$ または $n$ ごとに項をまとめる。

$$\begin{aligned} sv(mt-nu)+tu(ms-nv) &= m\,stv - n\,suv + m\,stu - n\,tuv \\ &= m\,st(u+v) - n\,uv(s+t). \end{aligned}$$

これで、どの項もすでに値のわかっている対称式（symmetric function）になった。代入すると、

$$\begin{aligned} m\,st(u+v) - n\,uv(s+t) &= m\cdot\frac{c^2-r^2}{1+m^2}\cdot\frac{2nc}{1+n^2} - n\cdot\frac{c^2-r^2}{1+n^2}\cdot\frac{2mc}{1+m^2} \\ &= \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} - \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} = 0. \end{aligned}$$

仮定より分母 $(ms-nv)(mt-nu)$ は 0 でないので、$p+q=0$ となり、求める結果が示された。

## 検算

図のように $c=1$、$r^2=5$、$m=1$、$n=-1$ とする。二次方程式は $x^2-x-2=0$ と $x^2+x-2=0$ であるから、$s=2$、$t=-1$、および $u=-2$、$v=1$ である。このとき $st=-2=\frac{1-5}{2}$、$s+t=1=\frac{2}{2}$ となり、予想どおりである。$S(2,2)$ から $V(1,-1)$ への直線は傾きが 3 で、$y=0$ と $p=\frac{4}{3}$ で交わる。これは $\frac{2\cdot2\cdot1}{2+1}$ と一致する。$U(-2,2)$ から $T(-1,-1)$ への直線は $q=-\frac{4}{3}$ で交わる。16 000 個のランダムな円と直線でコンピュータによる検証を行ったところ、$|p+q|$ は毎回 $10^{-12}$ 未満であった。

## よくある間違い

- 点の組み合わせを誤ること。$q$ は $U$ と $T$ から得られるので、置き換えは $s\to t$、$v\to u$ である。代わりに $s\leftrightarrow v$ と入れ替えると、再び $p$ が得られてしまう。
- 二次方程式を解いて $s,t,u,v$ を具体的に求めようとすること。平方根が現れて計算は手に負えなくなる。$m\,st(u+v)-n\,uv(s+t)$ とまとめることこそが、式をきれいに消し去る鍵である。

## STEP のその先へ

中心 $(0,c)$ は $y$ 軸上にあるので、直線 $y=0$ は円と交わって、$O$ を中点とする弦（chord）をつくる。したがってこの問題は**蝶の定理**（butterfly theorem）を証明している。す

なわち、2 本の弦 $ST$ と $UV$ がある弦の中点 $O$ を通るならば、$SV$ と $UT$ はその弦と $O$ から等距離にある点で交わる。この証明では $c^2 < r^2$ を一度も使っていないので、$O$ が円の外部にある場合にも成り立つ。これは、この結果の自然な舞台が射影幾何学（projective geometry）であることを示唆しており、そこではこの結果はデザルグ（Desargues）の対合定理（involution theorem）の特別な場合となる。さらに学ぶには、コクセター（Coxeter）と Greitzer による *Geometry Revisited*（邦訳『幾何学再入門』）がすばらしい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。