解答例

STEP II 2009、第 9 問

力学 ・ 質量中心

> **STEP II 2009、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q9

鍵となる考え方

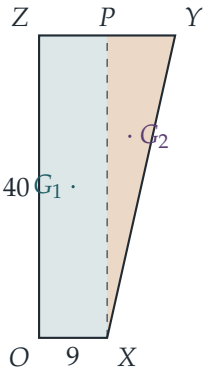
必要な距離はすべて、ある一つの固定された平面に垂直な方向に測られる。小問 (i) では辺 OZ、小問 (ii) では OZ を含むタンクの背面である。したがって、必要な座標は一つだけである。各図形を、重心（centre of mass）がわかっている部分（長方形と三角形）に分け、その直線または平面のまわりのモーメント（moment）をとり、全質量で割ればよい。タンクの場合も、一段上の同じ計算である。部分は板金でできた二枚の台形（trapezium）と三枚の長方形であり、さらにそこに液体の塊が加わる。

解答

小問 (i)

O を原点とし、x 軸を OX に沿って、y 軸を OZ に沿ってとる。すると $X = (9, 0)$、$Z = (0, 40)$ であり、YZ は OX に平行で長さが 18 であるから $Y = (18, 40)$ である。確認として、$XY^2 = 9^2 + 40^2 = 1681 = 41^2$ となり、確かに正しい。OZ からの距離はちょうど x 座標である。

X から OZ に平行な直線を引き、ZY との交点を $P = (9, 40)$ とする。これにより薄板（lamina）は長方形 $OXPZ$ と直角三角形 XYP に分けられる。



薄板の質量を cm^2 あたり 1 とし、質量と面積が等しくなるようにする。

- 長方形 $OXPZ$：面積は $9 \times 40 = 360$、重心 G_1 は $x = 4.5$ にある。
- 三角形 XYP：面積は $\frac{1}{2} \times 9 \times 40 = 180$。一様な三角形の重心は頂点の平均の位置にあるので、G_2 は $x = \frac{1}{3}(9 + 18 + 9) = 12$ にある。

薄板全体の面積は 540 である。OZ のまわりのモーメントをとると

$$540\,\bar{x} = 360 \times 4.5 + 180 \times 12 = 1620 + 2160 = 3780,$$

となるので、$\bar{x} = 7$ である。よって重心は OZ から 7 cm の位置にあり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

今度は板金の質量を cm^2 あたり 1 とする。背面 $OTWZ$ は平面 $x = 0$ 上にあり、幅 d は端面に垂直な方向にとられているので、タンクのどの点も小問 (i) と同じ x 座標をもつ。そこで背面のまわりのモーメントをとる。長方形の各面は一様なので重心はその中心にあり、その x 座標は台形の対応する辺の中点の x 座標と等しい。

部分	面積 (cm^2)	中心の x 座標 (cm)	モーメント
両端面	$2 \times 540 = 1080$	7	7560
底面 $OXUT$	$9d$	4.5	$40.5d$
背面 $OTWZ$	$40d$	0	0
前面 $XUVY$	$41d$	$\frac{1}{2}(9 + 18) = 13.5$	$553.5d$
合計	$1080 + 90d$		$7560 + 594d$

? **考えてみよう** 傾いた前面の中心はどこにあるか。

前面は、一組の辺 XU と YV をもつ長方形であり、これらの辺は $x = 9$ と $x = 18$ にある。その中心は両者のちょうど中間、$x = 13.5$ にある。面積には水平方向の幅 9 ではなく、斜辺の長さ $XY = 41$ を用いる。

したがって、空のタンクについて

$$\bar{x} = \frac{7560 + 594d}{1080 + 90d}.$$

である。係数はすべて 18 で割り切れる。実際、$7560 = 18 \times 420$、$594 = 18 \times 33$、$1080 = 18 \times 60$、$90 = 18 \times 5$ である。よって

$$\bar{x} = \frac{420 + 33d}{60 + 5d} = \frac{3(140 + 11d)}{5(12 + d)} \text{ cm},$$

となり、これが求める背面からの距離である。

液体を満たしたタンク

液体は、小問 (i) の台形を断面（cross-section）とし、長さが d の角柱（prism）を満たす。その体積は $540d$ なので、ここでの単位では質量は $540dk$ である（単位体積あたりの質量は、板金の単位面積あたりの質量の k 倍であり、後者を 1 としたのであった）。どの断面も同じ台形なので、液体の重心は小問 (i) と同じく $x = 7$ にある。

$d = 20$ のとき、タンクの質量は $1080 + 1800 = 2880$、背面のまわりのモーメントは $7560 + 594 \times 20 = 19440$ である。液体の質量は $10800k$、モーメントは $75600k$ である。よって液体を満たしたタンクについて

$$\bar{x} = \frac{19440 + 75600k}{2880 + 10800k} = \frac{27 + 105k}{4 + 15k} \text{ cm},$$

となる（分子と分母を 720 で割った）。これが、液体を満たしたタンクの重心の背面からの距離である。

検算

- $k = 0$（液体がない、または液体の密度（density）が無視できる）のとき答えは $\frac{27}{4} = 6.75$ であり、空のタンクの式に $d = 20$ を代入しても $\frac{3\times360}{5\times32} = 6.75$ となる。
- $k \to \infty$ のとき液体が支配的になり、$\bar{x} \to \frac{105}{15} = 7$ となる。これは液体自身の重心である。
- 答えは両者の加重平均（weighted average）なので、つねに 6.75 と 7 の間にある。たとえば $k = 1$ のときは $\frac{132}{19} \approx 6.947$ である。
- 数値による確認（靴ひも公式（shoelace formula）による台形の重心、$\bar{x} \approx 6.9994$ を与えるモンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定、および二つのタンクの式の厳密な分数計算）は、すべての結果と一致する。

よくある間違い

- 前面の面積に $41d$ ではなく $9d$ を用いること。この面は傾いているので、その幅は斜辺の長さ XY である。
- モーメントが 0 だからといって背面を除外すること。背面は全質量には $40d$ だけ寄与する。
- 端面を一枚しか数えないこと、またはタンクにふたをつけてしまうこと。

STEP のその先へ

ここでは、中心がわかっている部分に分けることで重心を求めた。大学では、薄板や立体の重心は $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint x\,\rho\,\mathrm{d}A$ のような積分（integral）で定義され、「部分に分ける」方法は、領域をいくつかの部分に切り分けたとき積分が加法的であるという事実にほかならない。同じ積分から慣性モーメント（moment of inertia）が得られ、これが物体の回転の仕方を支配する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この二つの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。