解答例

# STEP II 2009、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルと図形

> **STEP II 2009、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q8

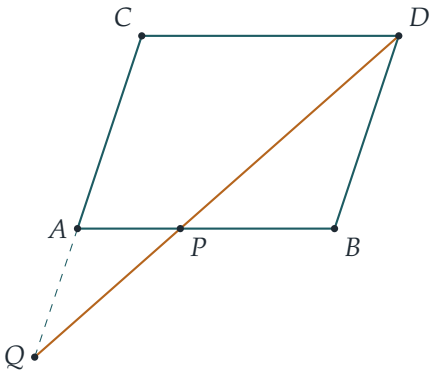
## 鍵となる考え方

それぞれの定義を「ある点から出発し、辺の何倍かだけ進む」という形に書き直す。すると $\mathbf{p}-\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ および $\mathbf{q}-\mathbf{c}=\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$ となるので、長さ $BP$ と $CQ$ は単に $\lambda\,AB$ と $\mu\,AC$ であり、長さの条件はきわめて簡単な方程式になる。3 点が同一直線上にある（collinear）ことを示すには、それらを結ぶベクトルのうち 2 つが平行であることを示せばよい。

## 解答

### 図

$0<\lambda<1$ として $\mathbf{p}=\mathbf{b}+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ であるから、点 $P$ は線分（segment）$AB$ 上の、$A$ と $B$ の間（端点を除く）にある。$\mu>1$ として $\mathbf{q}=\mathbf{c}+\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$ であるから、点 $Q$ は直線 $CA$ 上の、$A$ を越えた側にある。つまり $C$ から出発して $A$ へ向かい、そのまま進み続けた位置である。図（$\lambda=0.6$ として描いた）には、後で登場する点 $D$ も示してある。




### $\mu$ を求める

上の書き直しから、

$$BP = |\mathbf{p}-\mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \lambda\, AB, \qquad CQ = |\mathbf{q}-\mathbf{c}| = \mu|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \mu\, AC,$$

である。ここで $\lambda > 0$ と $\mu > 0$ を用いて、これらを絶対値の外に出した。条件 $CQ \times BP = AB \times AC$ は $\lambda\mu\, AB \cdot AC = AB \cdot AC$ となる。$A, B, C$ は相異なるので $AB \cdot AC \neq 0$ であり、したがって

$$\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

$0 < \lambda < 1$ であるから、これは確かに $\mu > 1$ を満たす。

### 定点 $D$

$\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ とおく。$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PD}$ を比較する。まず、

$$\begin{aligned}\mathbf{d} - \mathbf{p} &= -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \lambda\mathbf{a} - (1-\lambda)\mathbf{b} \\ &= -(1+\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mathbf{c}.\end{aligned}$$

次に、$\mu = 1/\lambda$ を用いると、

$$\begin{aligned}\mathbf{q} - \mathbf{p} &= \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)\mathbf{a} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{c} - (1-\lambda)\mathbf{b} \\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}\Big[(1+\lambda)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} - \mathbf{c}\Big],\end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{1}{\lambda} - \lambda = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{\lambda}$ と $1 - \frac{1}{\lambda} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}$ を用いた。

**考えてみよう** この 2 つのベクトルが平行であることは、どうすればわかるだろうか。

括弧の中身はちょうど $-(\mathbf{d}-\mathbf{p})$ である。よって

$$\mathbf{q}-\mathbf{p}=-\frac{1-\lambda}{\lambda}(\mathbf{d}-\mathbf{p}),\qquad \text{すなわち}\qquad \mathbf{d}=\mathbf{p}-\frac{\lambda}{1-\lambda}(\mathbf{q}-\mathbf{p}).$$

$\lambda\neq 1$ であるからこの係数は有限であり、また $Q$ は直線 $AB$ 上にないので $\mathbf{q}\neq\mathbf{p}$ である。したがって $D$ は直線 $PQ$ 上にある。ベクトル $\mathbf{d}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ だけで表されるので、これはすべての $\lambda$ に対して同じ点であり、示すべきことが示された。係数 $-\lambda/(1-\lambda)$ は負であるから、図のとおり $P$ は $Q$ と $D$ の間にある。

**四角形** $ABDC$

$$\mathbf{d}-\mathbf{c}=\mathbf{b}-\mathbf{a}\quad\text{かつ}\quad\mathbf{d}-\mathbf{b}=\mathbf{c}-\mathbf{a},$$

であるから、$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ である。向かい合う辺が等しくかつ平行なので、$ABDC$ は**平行四辺形**（parallelogram）であり、$D$ は $A$ の対頂点である。（$A, B, C$ は同一直線上にないので、これは退化（degenerate）していない。）

## 検算

- 幾何的な照合：$BD \parallel AC$ より三角形 $PAQ$ と $PBD$ は相似（similar）であるから、$AQ/BD = AP/BP$ である。ここで $AQ=(\mu-1)AC$、$BD=AC$、$AP=(1-\lambda)AB$、$BP=\lambda AB$ であるから $\mu-1=(1-\lambda)/\lambda$ となり、やはり $\mu=1/\lambda$ を得る。
- $A=(0,0)$、$B=(4,0)$、$C=(1,3)$、$\lambda=0.6$（図の場合）とすると、$P=(1.6,0)$、$Q=(-\frac{2}{3},-2)$、$D=(5,3)$ を得る。$QP$ と $PD$ の傾き（gradient）はいずれも $\frac{15}{17}$ である。
- さらに、3 次元空間内のランダムな三角形 20,000 個で検証した。長さの条件を $\mu$ について数値的に解いたところ、すべての場合で $10^{-13}$ の精度で $1/\lambda$ と一致し、$P, Q, D$ は同一直線上にあった。

## よくある間違い

- $BP=(1-\lambda)AB$ と書いてしまうこと。$\mathbf{p}$ における $\mathbf{b}$ の係数は $1-\lambda$ であるが、$B$ からの距離を測るのは $A$ にかかる重みのほうである。
- 頂点の順序を確かめずに $ABDC$ を「平行四辺形」と呼ぶこと。ここでは $A\to B\to D\to C$ の順であり、$AD$ と $BC$ が対角線である。

## STEP のその先へ

$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$ のように係数の和が 1 になる式を**アフィン結合**（affine combinations）という。これは（ベクトルではなく）点を扱うための自然な言葉であり、同一直線上にあるという性質はアフィンな性質である。すなわち、原点の選び方に依存しない。ここから重心座標（barycentric coordinates）や、直線が三角形の 3 辺（またはその延長）とどのようなときに交わるかを正確に記述するメネラウスの定理（Menelaus' theorem）のような古典的な結果へとつながっていく。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はベクトルの側面を展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式のベクトル幾何の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。