解答例

STEP II 2009、第 7 問

純粋数学 ・ 形を見抜く積分

> **STEP II 2009、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q7

鍵となる考え方

このような積分は一見手の施しようがないように見えるが、それらが何かの導関数（derivative）にちょうど一致していることに気づけば話は変わる。最初の結果は、$(x-a)^n \mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2}$ の導関数がどのような形になるかを教えてくれる。すなわち、$(x-a)$ の累乗、指数関数、3 次式の積を $\sqrt{1+x^2}$ で割った形である。したがって、各積分は実のところ照合の練習問題である。n、a、b を読み取り、3 次式が一致することを確かめればよい。分子の多項式が 3 次式ではなく 4 次式である場合には、余分な次数がどこから来るのかを突き止めなければならない。

解答

導関数

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を用いて、3 つの因子の積を微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= n(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + b(x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[\,n(1+x^2) + b(x-a)(1+x^2) + x(x-a)\,\Big],\end{aligned}$$

ここでは共通因数 $(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}/\sqrt{1+x^2}$ をくくり出した（最初の 2 項には $\sqrt{1+x^2}$ を掛けて分母をそろえている）。かっこの中を展開すると、

$$q(x) = bx^3 + (n+1-ab)x^2 + (b-a)x + (n-ab).$$

$b \neq 0$ であるから x^3 の係数は 0 でなく、q は確かに 3 次式である。これで求める結果が得られた。以下ではこれを次の形で用いる。

$$\int \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\,q(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + C. \qquad (*)$$

小問 (i)

因子を照合すると、$a=4$、$b=4$、$n-1=14$ すなわち $n=15$ でなければならない。これらの値に対して

$$q(x) = 4x^3 + (16-16)x^2 + (4-4)x + (15-16) = 4x^3 - 1,$$

となり、これは被積分関数（integrand）の 3 次式にちょうど一致する。よって $(*)$ より

$$\int \frac{(x-4)^{14}\mathrm{e}^{4x}(4x^3-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-4)^{15}\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

小問 (ii)

今度は多項式が 4 次式なので、そのまま q になることはありえない。

> **考えてみよう** 3 次式しか生み出さない公式に、4 次式をどうすれば当てはめられるだろうか？

$(*)$ における $(x-a)$ の累乗は自由に選べる。4 次式が因数 $(x-1)$ をもつならば、それを移して $(x-1)^{21}$ と合わせることができ、残りは 3 次式になる。$x=1$ を代入して確かめると $12-1-11=0$ であるから、$(x-1)$ は確かに因数であり、割り算を行うと

$$12x^4 - x^2 - 11 = (x-1)(12x^3 + 12x^2 + 11x + 11).$$

（これは $(x^2-1)(12x^2+11)$ と見抜くこともできる。）したがって被積分関数は

$$\frac{(x-1)^{22}\mathrm{e}^{12x}(12x^3+12x^2+11x+11)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$a=1$、$b=12$、$n=23$ とおくと、

$$q(x) = 12x^3 + (24-12)x^2 + (12-1)x + (23-12) = 12x^3 + 12x^2 + 11x + 11,$$

となり一致する。ゆえに

$$\int \frac{(x-1)^{21}\mathrm{e}^{12x}(12x^4-x^2-11)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-1)^{23}\mathrm{e}^{12x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

小問 (iii)

ここでも多項式は 4 次式であるが、今回は $x=2$ とすると $64+8-2=70\neq 0$ となるので、$(x-2)$ は因数ではなく、(ii) の工夫は使えない。

> **考えてみよう** $(x-2)$ が因数でないならば、余分な次数はどこから来るのだろうか？

次数を数えてみよう。被積分関数の分子の次数は $6+4=10$ であるが、$(x-2)^6$ に対する $(*)$ では次数は $6+3=9$ にしかならない。答えに余分な因子 x があれば次数が 1 つ上がるので、$a=2$、$b=4$、$n=7$ に対応する関数を y として、xy を微分してみる。

$$y=(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2},\qquad q(x)=4x^3+(8-8)x^2+(4-2)x+(7-8)=4x^3+2x-1.$$

積の微分法（product rule）より $(xy)'=y+xy'$ である。y も分母 $\sqrt{1+x^2}$ の形に直すと、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)&=\frac{(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^3+2x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[(x-2)(1+x^2)+4x^4+2x^2-x\Big].\end{aligned}$$

$(x-2)(1+x^2)=x^3-2x^2+x-2$ であるから、かっこの中は

$$x^3-2x^2+x-2+4x^4+2x^2-x=4x^4+x^3-2,$$

となり、求める 4 次式にちょうど一致する。したがって

$$\int\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^4+x^3-2)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}+C.$$

検算

- 各答えを微分して比較する。これが決定的な確認方法であり、いずれの場合もそれは $(*)$ そのものである（(iii) ではこれに積の微分法が加わる）。
- 手早い次数の確認：（平方根と指数関数を無視して）多項式としての次数が d の答えを微分すると、分子の次数は $d+2$ になる。(i) では $15+2=14+3$、(ii) では $23+2=21+4$、(iii) では $8+2=6+4$ である。
- 数値的には、(iii) の積分を区間 $[-1,\,1.2]$ でシンプソンの公式（Simpson's rule）により計算すると $-104.41424\ldots$ となり、$F(x)=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}$ に対する $F(1.2)-F(-1)$ と有効数字約 13 桁まで一致する。(i) と (ii) も同様によく一致する。

よくある間違い

- n が被積分関数における累乗の指数より 1 大きいことを忘れる。(i) の答えには $(x-4)^{14}$ ではなく $(x-4)^{15}$ が現れる。
- (ii) で、まず因数 $(x-1)$ を取り込むことをせずに 4 次式を直接照合しようとし、解がないと結論してしまう。
- 積分定数（constant of integration）を書き忘れる。

STEP のその先へ

ここで用いた方法は「見抜いて積分する」方法（integration by recognition）である。すなわち、原始関数（antiderivative）の形を推測し、それを微分して係数を比較する。これをアルゴリズムにしたものがリッシュのアルゴリズム（Risch algorithm）であり、数式処理システムは、初等関数が初等的な原始関数をもつかどうかを判定し、もつ場合にはそれを求めるのにこのアルゴリズムを用いている。関連する考え方として、未知の係数を含む所定の形の解を推測する方法は、線形微分方程式に対する未定係数法（method of undetermined coefficients）であり、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）で扱われている。STEP 風の積分問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。