解答例

STEP II 2009、第 6 問

純粋数学 ・ 無限級数の評価

> **STEP II 2009、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q6

鍵となる考え方

$\sum 1/F_i$ を正確に求めることはできないが、挟み込むことはできる。漸化式（recurrence）からは、二つの簡単な比較が得られる。各フィボナッチ数（Fibonacci number）は直前の項の 2 倍より小さく、二つ前の項の 2 倍より大きい。前者の比較により、級数（series）の残りの部分（tail）は等比級数（geometric series）で下から評価される。後者の比較により、残りの部分はそれ自身をずらしたものと結びつき、上から評価される。どちらの評価を使う前にも、最初のいくつかの項を正確に足しておけば、評価は望むだけ精密になる。

解答

隣り合う二項を順に足していくと

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55.$$

を得る。すべての F_n は正であり、$n \geq 2$ のとき $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > F_n$ であるから、この数列は F_2 以降で狭義単調増加である。

級数は収束する。 $i - 2 \geq 2$ のとき $F_{i-1} > F_{i-2}$ であるから、$i \geq 4$ に対して $F_i = F_{i-1} + F_{i-2} > 2F_{i-2}$ が成り立つ。$F_1 = 1 \geq 2^{-1/2}$、$F_2 = 1 \geq 2^0$、さらに $F_3 = 2 \geq 2^{1/2}$ であるから、二つずつ進む数学的帰納法（induction）により、すべての i に対して $F_i \geq 2^{(i-2)/2}$ が得られる。したがって $0 < 1/F_i \leq (1/\sqrt{2})^{i-2}$ であり、公比 $1/\sqrt{2} < 1$ の等比級数との比較により S は収束（converge）する。これにより、以下の和を自由に操作してよい。また、次の事実を繰り返し用いる。収束する級数について、すべて

の i で $a_i \le b_i$ であり、かつ少なくとも一つの i で $a_i < b_i$ ならば、$\sum a_i < \sum b_i$ である。

小問 (i)

下からの評価。 $i \ge 4$ のとき $F_{i-2} < F_{i-1}$ であるから

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} < 2F_{i-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} \qquad (i \ge 4),$$

となり、これが最初の結果である。($i = 3$ では $F_3 = 2F_2$ と等号が成り立つ。不等式が $i = 4$ から始まるのはこのためである。)

これを繰り返し用いると、$i \ge 4$ に対して

$$\frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} > \frac{1}{2^2 F_{i-2}} > \cdots > \frac{1}{2^{i-3}F_3} = \frac{1}{2^{i-2}}.$$

$i \ge 4$ について和をとると

$$\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2},$$

よって

$$S = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2} = 3.$$

上からの評価。 今度はもう一方の比較を用いる。上で示した $F_i > 2F_{i-2}$ より、$i \ge 4$ に対して $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$ である。これを $i = 5$ 以降のすべての項に適用し、$j = i - 2$ とおくと

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_{i-2}} = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{F_j} = \frac{1}{2}(S - 2).$$

左辺は S から最初の 4 項 $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$ を引いたものである。ゆえに

$$S - \tfrac{17}{6} < \tfrac{1}{2}S - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}S < \tfrac{11}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad S < \tfrac{11}{3} = 3\tfrac{2}{3}.$$

考えてみよう 上からの評価の比較を、$i = 4$ ではなく $i = 5$ から始めるのはなぜか。

$i = 4$ から始めても議論は成り立つが、$S - \frac{5}{2} < \frac{1}{2}(S - 1)$、すなわち $S < 4$ しか得られず、これでは不十分である。評価する前に正確に足しておく項が多いほど、係数 $\frac{1}{2}$ による損失は小さくなる。この考え方が小問 (ii) の原動力となる。

小問 (ii)

部分和（partial sum）を $S_k = \sum_{i=1}^{k} 1/F_i$、残りの部分を $T_k = \sum_{i=k}^{\infty} 1/F_i$ と書くと、$S = S_{k-1} + T_k$ である。小問 (i) では二つの一般的な評価を用いたが、どちらも $k \geq 3$ で成り立つ。

下から：先ほどとまったく同様に、$i > k$ に対して $1/F_i > 1/(2^{i-k}F_k)$ であるから

$$T_{k+1} > \frac{1}{F_k}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{F_k}, \qquad \text{よって} \qquad S > S_k + \frac{1}{F_k}.$$

上から：$i \geq k+2 \geq 5$ に対する $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$ から $T_{k+2} < \frac{1}{2}T_k$ が得られ、また $T_{k+2} = T_k - \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}}$ であるから

$$T_k < 2\left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\right), \qquad \text{よって} \qquad S < S_{k-1} + 2\left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\right).$$

$k = 3$ とすると、これらは小問 (i) の評価 3 と $3\frac{2}{3}$ になる。そこで、両方で $k = 5$ とする。

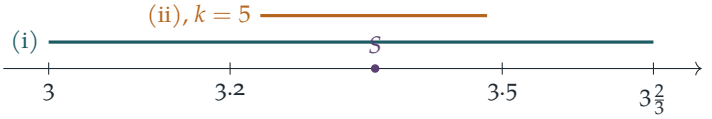
下からの評価については、$S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{91}{30}$ であるから

$$S > \frac{91}{30} + \frac{1}{5} = \frac{97}{30} > \frac{96}{30} = 3.2.$$

上からの評価については、$S_4 = \frac{17}{6}$、$F_5 = 5$、$F_6 = 8$ であるから

$$S < \frac{17}{6} + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{6} + \frac{13}{20} = \frac{170 + 39}{60} = \frac{209}{60} < \frac{210}{60} = 3.5.$$

以上を合わせると、求める $3.2 < S < 3.5$ が得られる。（$k = 4$ では不十分である。得られるのは $\frac{19}{6} < S < \frac{107}{30}$、すなわちおよそ $3.17 < S < 3.57$ にすぎない。）



検算

- 最初の 200 項を数値的に足し合わせると $S \approx 3.35989$ となる。これは両方の区間に含まれ、$k = 3, \ldots, 6$ に対する評価はすべてこの値を挟んでいる：$3 < \frac{19}{6} < \frac{97}{30} < \frac{197}{60} < S < \frac{2681}{780} < \frac{209}{60} < \frac{107}{30} < \frac{11}{3}$。
- 比較を実際の値で確かめる：$F_7 = 13 < 2 \times 8$ かつ $13 > 2 \times 5$。

よくある間違い

- 等号が成り立つ $i = 3$ で $1/F_i > 1/(2F_{i-1})$ を使ってしまう。これにより不等号の狭義性が崩れたり、誤った等比級数の和が得られたりする。
- 級数が収束することを先に確かめずに、S を数として操作する（「$S - \frac{17}{6} < \frac{1}{2}S - 1$」）。
- $i = 4$ から始めた比較では $S < 4$ しか得られないため、上からの評価をあきらめてしまう。評価する前に、さらに多くの項を正確に足すこと。

STEP のその先へ

この値 $S \approx 3.3598856\ldots$ は**逆数フィボナッチ定数**（reciprocal Fibonacci constant）と呼ばれる。これが無理数（irrational）であることは知られている（André-Jeannin による 1989 年の結果）が、閉じた形（closed form）は知られていない。ここでの比較は、形を変えた比判定法（ratio test）である。F_{i+1}/F_i は黄金比（golden ratio）$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ に収束するので、残りの部分は公比 $1/\varphi \approx 0.618$ の等比級数のように振る舞う。この公比は、我々が用いた粗い比 $\frac{1}{2}$ と $1/\sqrt{2}$ の間にある。このような比較判定法（comparison test）や残りの部分の評価は、解析学（analysis）の最初の講義の中核をなす。Abbott の *Understanding Analysis* は、これらをきちんと学ぶのに最適な一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。