解答例

STEP II 2009、第 5 問

純粋数学 ・ 二重根号

> **STEP II 2009、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q5

鍵となる考え方

冒頭の展開こそが、形を変えた問題全体である。それは $x+2\sqrt{x-1}$ が完全平方（perfect square）であることを教えてくれ、同じ手法で $x-2\sqrt{x-1}$ もまた完全平方であることがわかる。入れ子になった根号をほどいてしまえば、どの被積分関数（integrand）も初等的なものに帰着する。ただ一つ注意すべきは $\sqrt{a^2}=|a|$ であって a ではないという点であり、したがって符号に気を配らなければならない。まさにこの点が小問 (ii) を面白くしている。

解答

展開

$x \geq 1$ に対して、

$$(\sqrt{x-1}+1)^2 = (x-1)+2\sqrt{x-1}+1 = x+2\sqrt{x-1}.$$

同様にして $(\sqrt{x-1}-1)^2 = x-2\sqrt{x-1}$ である。負でない平方根をとり、$\sqrt{a^2}=|a|$ であることに注意すると、

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}+1, \qquad \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1}-1|.$$

前者は $\sqrt{x-1}+1>0$ であるから絶対値（modulus）を必要としない。後者は必要である。$\sqrt{x-1}-1$ は $1 \leq x < 2$ で負、$x \geq 2$ で非負となるからである。

小問 (i)

$[5,10]$ 上では $\sqrt{x-1} \geq 2 > 1$ であるから、$|\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}-1$ である。したがって分子は

$$(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x-1}-1) = 2\sqrt{x-1},$$

となり、被積分関数は単に 2 である。ゆえに

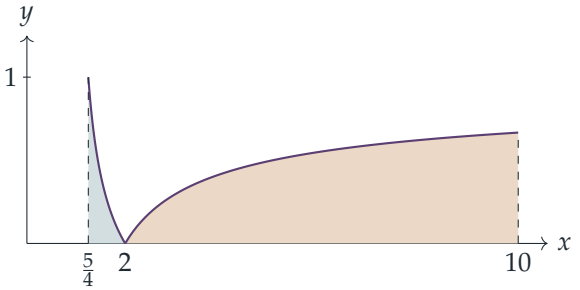
$$\int_5^{10} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_5^{10} 2\,\mathrm{d}x = 10.$$

小問 (ii)

上の展開により、

$$y = \frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}} = \left|1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|.$$

よって全体で $y \geq 0$ であり、曲線は $\sqrt{x-1}=1$ となる $x=2$ で x 軸に接する。



考えてみよう なぜ根号をそのまま外して、範囲全体で $1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ を積分してはいけないのだろうか？

$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ は決して負にならないが、$\sqrt{x-1}-1$ は $x<2$ で負になるからである。絶対値を無視すると、$[\frac{5}{4},2]$ 上の部分を負の面積として数えてしまう。そこで $x=2$ で区間を分ける。

$[\frac{5}{4},2]$ 上では $\sqrt{x-1} \leq 1$ であるから $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - 1$ となり、

$$\int_{5/4}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x-1}-x\right]_{5/4}^{2} = (2-2)-(1-\tfrac{5}{4}) = \tfrac{1}{4}.$$

$[2,10]$ 上では $\sqrt{x-1} \geq 1$ であるから $y = 1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ となり、

$$\int_2^{10}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x = \left[x-2\sqrt{x-1}\right]_2^{10} = (10-6)-(2-2) = 4.$$

したがって面積の合計は $\frac{1}{4}+4 = \frac{17}{4}$ である。

小問 (iii)

分子の二つ目の根号は形が異なるが、$x-1$ の代わりに $x+1$ を用いれば同じ手法が使える。

$$(\sqrt{x+1}-1)^2 = (x+1) - 2\sqrt{x+1} + 1 = x - 2\sqrt{x+1} + 2.$$

$x \geq \frac{5}{4}$ では $\sqrt{x+1} > 1$ であるから、$\sqrt{x-2\sqrt{x+1}+2} = \sqrt{x+1} - 1$ となり、絶対値は必要ない。$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}$ と書くと（$x > 1$ では両因数とも正なので正しい）、被積分関数は

$$\frac{(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

となる。二つの ± 1 の項が打ち消し合うのであり、これこそが少し奇妙に見える分子の狙いである。ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{5/4}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}\right]_{5/4}^{10} \\ &= (2\sqrt{11}+6) - (3+1) \\ &= 2\sqrt{11} + 2,\end{aligned}$$

ここで下端では $\sqrt{9/4} = \frac{3}{2}$ と $\sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$ を用いた。

検算

- $x = 5$ では $\sqrt{5+4} = 3$、$\sqrt{5-4} = 1$ であるから、(i) の被積分関数は $(3+1)/2 = 2$ となり、主張どおりである。
- (ii) において、$x = \frac{5}{4}$ での曲線の高さは $|1-2| = 1$、$x = 10$ での高さは $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であり、概形図と一致する。最初の部分は面積 $\frac{1}{4}$ の細い領域であり、妥当である。
- 元の被積分関数にシンプソン（Simpson）の公式（Simpson's rule）を適用すると 10.000、4.250、8.6332 が得られ、10、$\frac{17}{4}$、$2\sqrt{11}+2 \approx 8.6332$ と一致する。

よくある間違い

- すべての x に対して $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$ と書いてしまう。(ii) ではこれにより $\frac{17}{4}$ ではなく $4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ が得られてしまう。
- (iii) において、$x - 2\sqrt{x+1} + 2$ もまた完全平方であることに気づかず、代わりに置換積分を試みてしまう。

STEP のその先へ

恒等式 $\sqrt{a^2} = |a|$ は、解析学（analysis）における大きなテーマの小さな一例である。式で定義された関数には角や符号の変化が隠れていることがあり、式を積分する前に、それがどこで符号を変えるかを調べなければならない。また、$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ のような二重根号を外すこと（denesting radicals）には、体の拡大（field extensions）と結びついた、意外なほど深い代数的理論がある。解析学の側面については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）が次の一歩としてよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。