解答例

STEP II 2009、第 4 問

純粋数学 • 多項式の整除性

> **STEP II 2009、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q4

鍵となる考え方

$(x-1)^5$ で割り切れること（divisibility）は、式に書き下して扱うのがよい。すなわち、ある多項式（polynomial）q を用いて $\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\mathrm{q}(x)$ と書くのである。微分すると、$\mathrm{p}(x) - 1$ がもつ重複した因数は、次数が一つ下がった形で $\mathrm{p}'(x)$ にも残ることがわかる。最後の小問では、これによって p' がほぼ完全に決まってしまうので、10 個の未知の係数（coefficient）と格闘するのではなく、p' を積分して p を求める。

解答

$\mathrm{p}(x) - 1$ は $(x-1)^5$ で割り切れ、次数（degree）は 9 であるから、

$$\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\,\mathrm{q}(x),$$

と書ける。ここで q は次数 4 の多項式である。

小問 (i)

$x = 1$ を代入すると第 2 項が消えるので、

$$\mathrm{p}(1) = 1.$$

小問 (ii)

積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{p}'(x) &= 5(x-1)^4\,\mathrm{q}(x) + (x-1)^5\,\mathrm{q}'(x) \\ &= (x-1)^4(5\mathrm{q}(x) + (x-1)\mathrm{q}'(x)). \end{aligned}$$

括弧の中は多項式であるから、$\mathrm{p}'(x)$ は $(x-1)^4$ で割り切れる。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

$x-1$ の代わりに $x+1$ を用いて、まったく同じ議論が成り立つ。すなわち $\mathrm{p}(x) = -1 + (x+1)^5\,\mathrm{r}(x)$ と書けば $\mathrm{p}(-1) = -1$ が得られ、さらに $\mathrm{p}'(x)$ が $(x+1)^4$ で割り切れることがわかる。

したがって、$\mathrm{p}'(x)$ は $(x-1)^4$ でも $(x+1)^4$ でも割り切れる。

考えてみよう なぜこのことから、$\mathrm{p}'(x)$ が積 $(x-1)^4(x+1)^4$ で割り切れるといえるのか？

$\mathrm{p}'(x) = (x-1)^4\mathrm{s}(x)$ と書く。$(x+1)^4$ の根はすべて -1 であり、これは $(x-1)^4$ の根ではないので、因数 $(x+1)^4$ は $\mathrm{s}(x)$ を割り切らなければならない。（同じことであるが、1 次因数 $x+1$ は p' に 4 回現れ、そのどれも $(x-1)^4$ によって使い尽くされることはない。）よって $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$ は $\mathrm{p}'(x)$ を割り切る。

さて、p' の次数は 8 であり、$(x^2-1)^4$ の次数と等しいので、商（quotient）は 0 でない定数である：

$$\mathrm{p}'(x) = k(x^2-1)^4 = k\left(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1\right).$$

積分すると、

$$\mathrm{p}(x) = k\,\mathrm{F}(x) + c, \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{4x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x.$$

F は奇関数（odd function）であるから、$\mathrm{F}(-1) = -\mathrm{F}(1)$ であることに注意する。既知の二つの値から

$$k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(1) = 1, \qquad -k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(-1) = -1.$$

辺々を加えると $c = 0$、引くと $k\mathrm{F}(1) = 1$ を得る。分母を 315 にそろえると、

$$\mathrm{F}(1) = \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = \frac{128}{315}, \qquad \text{よって} \qquad k = \frac{315}{128}.$$

したがって

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{128}\left(35x^9 - 180x^7 + 378x^5 - 420x^3 + 315x\right).$$

ここまでで示したのは、条件を満たす p があるとすれば必ずこの形になるということだけなので、この多項式が実際に条件を満たすことも確かめておくべきである。次数は 9 である。また $\mathrm{p}(1) - 1 = 0$ であり、$\mathrm{p}'(x) = \frac{315}{128}(x-1)^4(x+1)^4$ であるから、$\mathrm{p}(x) - 1$ の 1 階から 4 階までの導関数はすべて $x = 1$ で 0 となる。ゆえに $x = 1$ は $\mathrm{p}(x) - 1$ の重複度（multiplicity）5 以上の根であり、すなわち $(x-1)^5$ は $\mathrm{p}(x) - 1$ を割り切る。p は奇関数であるから、$\mathrm{p}(x) + 1 = -(\mathrm{p}(-x) - 1)$ であり、これは $(-x-1)^5 = -(x+1)^5$ で割り切れる。よって両方の条件が成り立ち、この p がただ一つの答えである。

検算

- 係数 $35, -180, 378, -420, 315$ の和は 128 であり、$\mathrm{p}(1) = 1$ が確かめられる。
- $\mathrm{p}(x) - 1$ を分数のまま正確に $x - 1$ で繰り返し割ると、ちょうど 5 回まで余りなく割り切れる。$\mathrm{p}(x) + 1$ を $x + 1$ で割る場合も同様である。
- p は奇関数であり、そうでなければならない。なぜなら、p が条件を満たすならば $-\mathrm{p}(-x)$ も条件を満たし、しかも答えはただ一つだからである。

よくある間違い

- 10 元の連立方程式（simultaneous equations）から p の 10 個の係数をすべて直接求めようとすること。原理的には可能だが、p' を積分するほうがはるかに速い。
- 積分定数（constant of integration）を忘れること、あるいは積分定数と k を決めるのに $\mathrm{p}(1) = 1$ と $\mathrm{p}(-1) = -1$ の両方を使わないこと。

STEP のその先へ

小問 (ii) の背後にある事実は、a が f の重複度 m の根であることと $\mathrm{f}(a) = \mathrm{f}'(a) = \cdots = \mathrm{f}^{(m-1)}(a) = 0$ が成り立つことが同値である、というものである。このように各点で値と導関数の値を指定することを**エルミート補間**（Hermite interpolation）といい、ここで求めた多項式は「スムーズステップ」（smoothstep）曲線と呼ばれる。これは両端でできるだけ平らになりながら -1 から 1 まで増加する曲線で、コンピュータグラフィックスで用いられている。互いに素（coprime）な因数がともに割り切るならその積も割り切る、という議論は環論（ring theory）の一部である。体（field）上の多項式は、整数とまったく同じように一意分解（unique factorisation）をもつのである。さらに

知りたければ、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。