解答例

STEP II 2009、第 3 問

純粋数学 ・ 三角関数の恒等式と無理数

> **STEP II 2009、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q3

鍵となる考え方

恒等式（identity）$(*)$ は、角 x における既知の正接（tangent）の値を、角 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ における正接の値に変換する。この角はおよそ x の半分である。つまり、$(*)$ は半角を生み出す装置としてはたらく。肝心なのは、求めたい角にちょうど行き着くような出発点の角 x を選ぶことである。そのあとは、有理化（rationalising）、展開、平方といった無理数（surd）の計算を丁寧に進めればよい。

解答

$(*)$ の証明

$\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ とおくと、$x = \frac{1}{2}\pi - 2\theta$ である。このとき

$$\sin x = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \qquad \cos x = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

したがって、両辺が定義される範囲（すなわち $\cos x \neq 0$）において

$$\sec x - \tan x = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

$\cos x = 2\sin\theta\cos\theta \neq 0$ より $\sin\theta \neq 0$ が従うので、$\sin\theta$ で約分してよい。以上で $(*)$ が証明された。

小問 (i)

$\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}\pi$ となるようにしたいので、$x = \frac{1}{4}\pi$ とする。$\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$、$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ であるから

$$\tan\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1.$$

二つ目の結果については、$\frac{11}{24}\pi = \frac{3}{24}\pi + \frac{8}{24}\pi = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3}\pi$ であることに注目する。$\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$ はわかっている。加法定理（addition formula）により

$$\tan\frac{11}{24}\pi = \frac{\tan\frac{1}{8}\pi + \tan\frac{1}{3}\pi}{1 - \tan\frac{1}{8}\pi\tan\frac{1}{3}\pi} = \frac{(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}}{1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1},$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (ii)

三つの項からなる分母を有理化するよりも、

$$(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1.$$

を示すほうが早い。$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ と $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ を用いて、$\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$ に一つ目の括弧の各項を順に掛けると

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2,\\
\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= \sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2},\\
\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3-3\sqrt{2}+\sqrt{3},\\
\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

ここで同類項をまとめる。定数項は $2+3-6=-1$、$\sqrt{2}$ の項は $1-3+3=1$、$\sqrt{3}$ の項は $2-2+1=1$、$\sqrt{6}$ の項は $-2+1+1=0$ となる。合計は $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$ である。分母 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1 \approx 0.28$ は 0 でないから、これで割ることができて

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

考えてみよう 最後の小問では、$(*)$ にどの x の値を代入すればよいか。

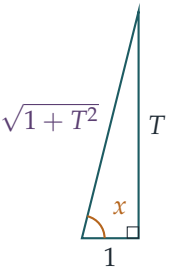
$\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$ となる必要があるので、$\frac{1}{2}x = \frac{11}{48}\pi$、すなわち $x = \frac{11}{24}\pi$ である。これはまさに (i) と (ii) で正接の値を求めた角である。

小問 (iii)

$T = \tan\frac{11}{24}\pi = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ とおく。$x = \frac{11}{24}\pi$ として $(*)$ を用いると

$$\tan\frac{1}{48}\pi = \sec\frac{11}{24}\pi - T.$$

正割（secant）については $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$ が成り立つ。$0 < \frac{11}{24}\pi < \frac{1}{2}\pi$ より余弦は正であるから、正の平方根をとって $\sec\frac{11}{24}\pi = \sqrt{1+T^2}$ となる。下の三角形も同じことを示している。



T を平方すると、四つの項それぞれの平方からは $4+2+3+6=15$ が得られる。異なる項どうしの積（cross terms）からは

$$2(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}) = 2(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}) = 10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}.$$

が得られる。よって $1+T^2 = 16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}$ であり、したがって

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi = \sqrt{16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}} - 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $\sqrt{2}-1 \approx 0.41421$ であり、$\tan 22.5^\circ$ と一致する。
- $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \approx 7.59575$ であり、$\tan 82.5^\circ$ と一致する。(i) の分数も同じ値になる。
- 最終的な式は $\sqrt{57.45\ldots} - 7.59575 \approx 0.0655435$ であり、$\tan 3.75^\circ \approx 0.0655435$ と一致する。
- $(*)$ の簡単な確認：$x=0$ のとき両辺はともに 1、$x=\frac{1}{3}\pi$ のとき両辺はともに $2-\sqrt{3} = \tan\frac{1}{12}\pi$ となる。

よくある間違い

- $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$ を解き間違えて、$x=\frac{11}{48}\pi$ を用いてしまう。$\frac{1}{2}$ を払うことを忘れてはならない。
- 四つの項からなる無理数を平方するときに、異なる項どうしの積を書き漏らす。それは全部で六つあり、それぞれ 2 倍される。
- 正の平方根が正しい理由を述べずに $\sec x = \sqrt{1+\tan^2 x}$ とする。

STEP のその先へ

このように角の半分をとることを繰り返すことで、$\tan\frac{\pi}{48}$ のような、二重根号を含む正確な値が組み立てられる。これは、どの正多角形（regular polygon）が定規とコンパス（ruler and compass）で作図できるかという古典的な問題の代数的な側面である。ガウス（Gauss）は、その答えが $\cos\frac{2\pi}{n}$ を平方根だけを用いて表せるかどうかにかかっていることを示し、ガロア理論（Galois theory）はその理由を説明する。この話の言葉である体（field）と体の拡大（field extension）に初めて触れるには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。