解答例

STEP II 2009、第 2 問

純粋数学 ・ 曲線の概形と近似

> **STEP II 2009、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q2

鍵となる考え方

$a > 1$ であるから、関数 a^u は u について狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって y は、ちょうど $\sin(\pi e^x)$ が最大となるところで最大となり、最小となるところで最小となる。よって曲線の性質はすべて内側の関数（inner function）πe^x から決まる。この関数は一様に増加し続け、x が大きくなるにつれてますます密集していく点で、正弦関数の山と谷を次々に通過していく。面積については、台形の両端の高さがそろっているため、和が対数の差ひとつにまでまとまってしまう。

解答

小問 (i)

対数をとると $\ln y = \ln a \, \sin(\pi e^x)$ である。陰関数として微分（implicit differentiation）すると

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x), \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x)\, a^{\sin(\pi e^x)}.$$

ここで $\ln a > 0$（$a > 1$ より）、$e^x > 0$、$a^{\sin(\pi e^x)} > 0$ であるから、導関数が 0 となるのはちょうど $\cos(\pi e^x) = 0$ のとき、すなわち πe^x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍のときである。$\pi e^x > 0$ であるから、ありうるのは正の奇数倍だけである：

$$e^x = n + \tfrac{1}{2}, \qquad x = \ln(n + \tfrac{1}{2}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

これらの点では $\sin(\pi e^x) = \sin((n + \frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$ となるので、$y = a^{(-1)^n}$ である。停留点（stationary point）は

$$\left(\ln(n + \tfrac{1}{2}),\, a\right) \ (n \text{ が偶数}), \qquad \left(\ln(n + \tfrac{1}{2}),\, \tfrac{1}{a}\right) \ (n \text{ が奇数}).$$

前者は極大点（maximum）、後者は極小点（minimum）である。a^u は増加関数であるから、すべての x に対して $y \leq a^1 = a$ かつ $y \geq a^{-1}$ が成り立つ。したがって $y = a$ となる点は最大点（global maximum）、$y = 1/a$ となる点は最小点（global minimum）である。具体的には、極大点は $x = \ln\frac{1}{2}, \ln\frac{5}{2}, \ln\frac{9}{2}, \ldots$ にあり、極小点は $x = \ln\frac{3}{2}, \ln\frac{7}{2}, \ln\frac{11}{2}, \ldots$ にある。

小問 (ii)

x が小さいとき $e^x \approx 1 + x$ であるから

$$\sin(\pi e^x) \approx \sin(\pi + \pi x) = -\sin(\pi x) \approx -\pi x,$$

となる。ここでは $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ を用い、続いて $t = \pi x$ が小さいことから $\sin t \approx t$ を用いた。よって

$$y \approx a^{-\pi x} = e^{-\pi x \ln a} \approx 1 - \pi x \ln a,$$

最後の段階では、今度は小さい量 $t = -\pi x \ln a$ に対して再び $e^t \approx 1 + t$ を用いた。これが求める近似である。曲線は $x = 0$ において傾き $-\pi \ln a$ で直線 $y = 1$ と交わる。

> **考えてみよう** なぜ $\sin t \approx t$ を $\sin(\pi e^x)$ にそのまま適用できないのだろうか？

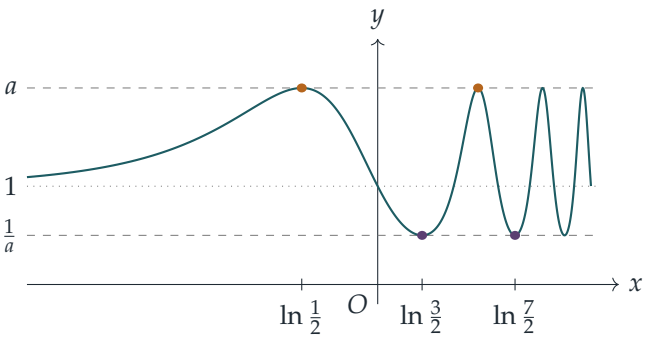
x が小さいとき、πe^x は 0 ではなく π に近いからである。まず $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ を用いて、小さい量 πx を正弦の引数に移す必要がある。

小問 (iii)

概形に描き込むべき特徴をいくつか挙げる：

- $x \to -\infty$ のとき $e^x \to 0$ であるから、$\sin(\pi e^x) \to 0$ となり、$y \to 1$ と上から近づく（$x < \ln\frac{1}{2}$ では $0 < \pi e^x < \frac{\pi}{2}$ であるから正弦は正であり、$y > 1$ となる）。直線 $y = 1$ は左側の漸近線（asymptote）である。
- 曲線は $x = \ln\frac{1}{2}$ で最初の極大値 a まで上昇し、その後は a と $1/a$ の間を永遠に振動し続け、常に x 軸より上にある。
- 曲線は e^x が正の整数となるところ、すなわち $x = 0, \ln 2, \ln 3, \ldots$ で $y = 1$ と交わり、小問 (ii) より $x = 0$ における傾きは $-\pi \ln a$ である。
- 隣り合う停留点の間隔は $\ln\frac{n+3/2}{n+1/2} \to 0$ であるから、x が増加するにつれて振動はどんどん速くなる。

図は $a = 2$ の場合である。



小問 (iv)

極大点を左から数える。k 番目の極大点は $n = 2(k-1)$ に対応するので、$\mathrm{e}^x = 2k - \frac{3}{2}$ にある。$(k+1)$ 番目の極大点は $\mathrm{e}^x = 2k + \frac{1}{2}$ にあり、その間にただひとつある極小点は $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{1}{2}$ にある。

$$x_1 = \ln\left(2k - \tfrac{3}{2}\right), \qquad x_2 = \ln\left(2k - \tfrac{1}{2}\right), \qquad x_3 = \ln\left(2k + \tfrac{1}{2}\right).$$

とおく。(x_1, a) と $(x_2, \frac{1}{a})$、および $(x_2, \frac{1}{a})$ と (x_3, a) をそれぞれ線分で結ぶと、x 軸までの領域は 2 つの台形（trapezium）に分かれ、いずれも平行な辺の長さは a と $\frac{1}{a}$ である。よって面積の近似値は

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_3 - x_2) &= \frac{a^2+1}{2a}\,(x_3 - x_1) \\ &= \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{2k+\frac{1}{2}}{2k-\frac{3}{2}} = \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

最後に $\dfrac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}} = 1 + \dfrac{1}{k-\frac{3}{4}}$ であるから、面積は近似的に

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)\ln\left(1 + \left(k - \tfrac{3}{4}\right)^{-1}\right),$$

となり、これが求めるものである。極小点の位置 x_2 が完全に打ち消し合っていることに注意しよう。効いてくるのは 2 つの極大点だけである。

検算

- 数値微分により、$n = 0, \ldots, 7$ に対して $x = \ln(n + \frac{1}{2})$ で $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ となり、$[-6, \ln 8]$ 上の他の点ではそうならないこと、また $x = 0$ における傾きが $-\pi \ln a$ であること（$a = 2$ のとき、どちらも -2.1776）が確認できる。
- $a = 2$、$k = 1$ のとき公式は $\frac{5}{4}\ln 5 \approx 2.012$ を与える。一方、シンプソンの公式（Simpson's rule）によれば真の面積は 1.954 であり、近似として十分に近い。台形

はわずかに過大評価している。極小点の付近で曲線が弦より下にへこむ量のほうが、極大点の付近で弦より上にふくらむ量よりも大きいからである。

- $k \to \infty$ のとき面積は 0 に近づき、振動の幅がどんどん狭くなることと整合している。

よくある間違い

- 小問 (i) で $\frac{\pi}{2}$ の負の奇数倍まで含めてしまう。πe^{x} は常に正である。
- 極大点の番号を $k = 1$ ではなく $k = 0$ から数えてしまい、答えが $\ln\left(1 + (k + \frac{1}{4})^{-1}\right)$ にずれる。
- 小問 (ii) で、最後の線形化（linearisation）$e^{t} \approx 1 + t$ を行わずに $a^{-\pi x}$ で止めてしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、より単純な展開を合成することで得られる 1 次のテイラー展開（Taylor expansion）であり、これはまさに大学生が合成関数の展開を扱うときのやり方である。k が大きいとき、1 回の振動あたりの真の面積はおよそ $(x_3 - x_1)$ と、1 周期にわたる $a^{\sin\theta}$ の平均との積になる。この平均を表す積分からは変形ベッセル関数（modified Bessel function）$I_0(\ln a)$ が現れる。これを $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ と比較することは、このような曲線に対して台形公式（trapezium rule）がなぜ過大評価になるのかを理解するよい演習である。近似とテイラー（Taylor）の定理の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。