解答例

STEP II 2009、第 13 問

確率・統計 ・ 二項分布と期待費用

STEP II 2009、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s2-q13

鍵となる考え方

故障するエンジンの個数は二項分布（binomial distribution）に従うので、修理費用は二項分布に従う確率変数（random variable）の簡単な関数であり、その期待値（expectation）は短い和で表される。きれいな形 $(*)$ に到達するための工夫は、「すべて交換する」場合を一つずつ足し合わせないことである。余事象（complement）を用い、さらに $1-q^n = p(1+q+\cdots+q^{n-1})$ と因数分解して因数 p をくくり出すのである。

解答

問題の意図どおり、各エンジンは互いに独立（independent）に、それぞれ確率 p で故障すると仮定し、$q = 1-p$ とおく。最後まで、費用はすべて K を単位として測る。

Andover 機

故障する Andover 機のエンジンの個数を X とすると $X \sim \mathrm{B}(4, p)$ であり、修理費用を C_A とする。このとき

$$C_A = \begin{cases} 0 & X = 0, \\ K & X = 1, \\ 4K & X \geq 2. \end{cases}$$

ここで $\mathrm{P}(X=0)=q^4$、$\mathrm{P}(X=1)=4pq^3$ であるから、$\mathrm{P}(X\geq 2)=1-q^4-4pq^3$ である。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_A)&=K\cdot 4pq^3+4K(1-q^4-4pq^3)\\&=4K(1-q^4)-12Kpq^3.\end{aligned}$$

$1-q^4=(1-q)(1+q+q^2+q^3)=p(1+q+q^2+q^3)$ であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_A)&=4Kp(1+q+q^2+q^3)-4Kp\cdot 3q^3\\&=4Kp(1+q+q^2-2q^3),\end{aligned}$$

となり、これは求める $(*)$ である。

Basingstoke 機

故障する Basingstoke 機のエンジンの個数を $Y\sim \mathrm{B}(6,p)$ とし、修理費用を C_B とする。このとき、$Y\leq 2$ ならば $C_B=YK$、$Y\geq 3$ ならば $C_B=6K$ である。

$$\mathrm{P}(Y=0)=q^6,\qquad \mathrm{P}(Y=1)=6pq^5,\qquad \mathrm{P}(Y=2)=15p^2q^4,$$

を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_B)&=K\cdot 6pq^5+2K\cdot 15p^2q^4+6K(1-q^6-6pq^5-15p^2q^4)\\&=6K(1-q^6)-30Kpq^5-60Kp^2q^4.\end{aligned}$$

を得る。$1-q^6=p(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)$ を用いて $6Kp$ をくくり出すと、

$$\mathrm{E}(C_B)=6Kp(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5-5q^5-10pq^4).$$

> ? **考えてみよう** かっこの中にはまだ p が残っている。どうすれば「$(*)$ に似た形」にできるだろうか。

$(*)$ の形は、因数 p と q だけの多項式との積である。そこで残っている p を $1-q$ で置き換える：$10pq^4=10q^4-10q^5$。項を整理すると、

$$\boxed{\mathrm{E}(C_B)=6Kp(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5).}$$

Andover 機の費用が Basingstoke 機の費用の $\frac{2}{3}$ になるのはいつか

$\mathrm{E}(C_A)=\frac{2}{3}\mathrm{E}(C_B)$、すなわち

$$4Kp(1+q+q^2-2q^3)=4Kp(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5).$$

となる必要がある。両辺は因数 $4Kp$ をもち、$K > 0$ であるから、これが成り立つのは $p = 0$ または

$$-2q^3 = q^3 - 9q^4 + 6q^5 \iff 3q^3 - 9q^4 + 6q^5 = 0 \iff 3q^3(1-q)(1-2q) = 0.$$

のときであり、かつそのときに限る。したがって $q = 0$、$q = 1$ または $q = \frac{1}{2}$ であり、それぞれ $p = 1$、$p = 0$、$p = \frac{1}{2}$ となる。三つとも $[0,1]$ に含まれるので、求める値は

$$p = 0, \qquad p = \tfrac{1}{2}, \qquad p = 1.$$

である。$p = 0$ はつまらない場合である。どのエンジンも決して故障せず、どちらの期待費用も 0 である。$p = 1$ ではすべてのエンジンが故障し、費用は $4K$ と $6K$ になる。興味深いのは $p = \frac{1}{2}$ である。

検算

$p = \frac{1}{2}$ のとき、$(*)$ から $\mathrm{E}(C_A) = 2K(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 3K$ を得る。また Basingstoke 機の式から $\mathrm{E}(C_B) = 3K(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{9}{16} + \frac{6}{32}) = \frac{9}{2}K$ を得て、確かに $3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}$ である。さらに、二つの式を、p の 200 個の有理数値について二項分布を直接数え上げた結果と厳密に照合し、またシミュレーション（simulation）によっても確かめた。$p = 0.3$ のとき、2×10^5 回の模擬飛行で得られた平均費用は $1.811K$ と $2.483K$ であり、式の値 $1.805K$ と $2.485K$ とよく一致した。

よくある間違い

- Andover 機のエンジンが 2 個以上故障したときの費用を $4K$ ではなく XK としてしまう。閾値を超えると、正常なものも含めて**すべての**エンジンが交換される。
- Basingstoke 機のかっこの中に p を残してしまい、答えが問われた形になっていない。
- 最後の方程式で p で割って $p = 0$ を落としたり、q^3 で割って $p = 1$ を落としたりする。

STEP のその先へ

これは、閾値（threshold）に基づく方針のもとでの期待費用を扱う小さな例であり、信頼性理論（reliability theory）やオペレーションズ・リサーチ（operational research）の基本中の基本である。管理者は、正常な部品を交換する費用と、より頻繁に修理する費用との釣り合いがとれるように閾値を選ぶ。ここで用いた裾の和の操作、すなわ

ち $\mathrm{P}(X \geq k)$ を 1 から最初の数項を引いたものとして書くことは、非負整数値をとる確率変数に対して $\mathrm{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathrm{P}(X \geq k)$ を導くのと同じ考え方である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。