解答例

STEP II 2009、第 11 問

力学 ・ 仕事率と抵抗

> **STEP II 2009、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q11

鍵となる考え方

列車全体を、質量 $(n+1)M$、全抵抗 $(n+1)R$ の一つの物体として扱う。仕事率（power）が P のとき、速さ v における駆動力は P/v であるから、ニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）からただちに加速度が得られる。ある速さに達するまでの時間を求めるには、加速度を $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ と書き、変数分離（separation of variables）を行って積分する。最後の小問はエネルギーの収支である。機関車のした仕事は、運動エネルギー（kinetic energy）と、抵抗に逆らってする仕事とに分かれる。

解答

機関車と貨車を、一緒に運動する質点とみなす（連結器は張ったまま変形しない）。すると列車は一つの物体となる。その全質量と全抵抗を

$$m = (n+1)M, \qquad k = (n+1)R$$

と書く。

加速度

仕事率は力と速さの積であるから、最大仕事率で速さが v のとき、機関車の牽引力は P/v である。線路に沿った方向の成分を考えると、列車全体に対するニュートンの第 2 法則から

$$ma = \frac{P}{v} - k, \qquad \text{よって} \qquad a = \frac{P-(n+1)Rv}{(n+1)Mv}.$$

速さ V に達するまでの時間

$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ とおき、変数を分離する：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{mv}{P - kv}, \qquad T = m\int_0^V \frac{v}{P-kv}\,\mathrm{d}v.$$

積分するために、分子を分母を用いて $v = \frac{1}{k}(P - (P - kv))$ と書き、分数を分ける：

$$\frac{v}{P-kv} = -\frac{1}{k} + \frac{P}{k}\cdot\frac{1}{P-kv}.$$

したがって

$$T = m\Big[-\frac{v}{k} - \frac{P}{k^2}\ln(P-kv)\Big]_0^V = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln\Big(1 - \frac{kV}{P}\Big).$$

$m/k = M/R$ および $m/k^2 = M/((n+1)R^2)$ であるから、

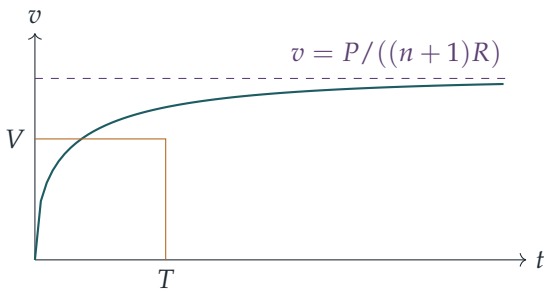
$$T = -\frac{MV}{R} - \frac{MP}{(n+1)R^2}\ln\Big(1 - \frac{(n+1)RV}{P}\Big).$$

考えてみよう P が $(n+1)RV$ より大きくなければならないのはなぜか。これは単に対数が意味をもつための条件にすぎないのではないのか。

物理的には、加速度 $(P-kv)/(mv)$ は $v < P/k$ の間は正であり、$v = P/k$ では 0 になるはずである。列車は $v = 0 < P/k$ から出発して加速するが、v が P/k に近づくにつれて加速度は消えていく。公式から、列車がそこに到達することは決してないことがわかる。実際、$V \to P/k$ と下から近づけると $\ln(1 - kV/P) \to -\infty$ となり、$T \to \infty$ となる。したがって P/k は終端速度（terminal speed）であり、列車はそれに近づくが有限の時間では決して到達せず、それ以上の速さにも決して達しない。ゆえに速さ V に到達できるのは $V < P/k$ のとき、すなわち

$$P > (n+1)RV,$$

のときに限られ、これが示すべきことであった。（同じことだが、$P \le kV$ ならば、機関車は最大仕事率でも速さ V における抵抗とつり合うことすらできない。）



（この図は定性的なものである。駆動力 P/v が大きい最初のうちは速さが急激に増し、やがて終端速度に向かって頭打ちになる。）

小問 (i)

$x = \dfrac{(n+1)RV}{P} = \dfrac{kV}{P}$ とおくと、これは小さい。このとき $\ln(1-x) \approx -x - \frac{1}{2}x^2$ であり、$V = Px/k$ を用いると

$$T = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln(1-x) \approx -\frac{mP}{k^2}x + \frac{mP}{k^2}\left(x + \tfrac{1}{2}x^2\right) = \frac{mP}{2k^2}x^2 = \frac{mP}{2k^2}\cdot\frac{k^2V^2}{P^2} = \frac{mV^2}{2P}.$$

1 次の項はちょうど打ち消し合う。x^2 の項が必要だったのはこのためである。したがって

$$PT \approx \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2.$$

解釈。 PT は時間 T の間に機関車がした仕事であり、$\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ は列車が得た運動エネルギーである。よって $(n+1)RV$ が P に比べて小さいとき（抵抗力と速さの積が機関車の仕事率に比べて小さいとき）、機関車の仕事のほとんどすべてが運動エネルギーになり、抵抗で失われる分はごくわずかである。つまり列車は抵抗がないかのようにふるまう。

小問 (ii)

時間 T の間に、一定の仕事率 P で働く機関車は仕事 PT をする。距離 X にわたって、一定の全抵抗 $(n+1)R$ は仕事 $-(n+1)RX$ をする。言い換えれば、列車は抵抗に逆らって仕事 $(n+1)RX$ をする。列車は静止状態から出発して速さ V に達し、線路は水平なので位置エネルギーの変化はない。仕事とエネルギーの原理（work–energy principle）により、

$$PT = \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2 + (n+1)RX.$$

これを整理すると

$$X = \frac{2PT - (n+1)MV^2}{2(n+1)R},$$

となり、示すべき式が得られる。これは小問 (i) と整合している。抵抗が無視できるならば $(n+1)RX$ の項が消え、$PT \approx \frac{1}{2}(n+1)MV^2$ が残る。

検算

- $n = 3$、$M = 2$、$R = 1$、$P = 40$、$V = 6$ とする（このとき $(n+1)RV = 24 < 40$）。公式から $T \approx 6.3258$、さらに $X \approx 27.258$ が得られる。運動方程式を数値的に時間発展させても、有効数字 4 桁で同じ値が得られる。

- 次元：MV/R は（質量）（速さ）/（力）であり、これは時間である。MP/R^2 も同様である。対数は無次元である。
- $V \to P/\big((n+1)R\big)$ とすると T は限りなく大きくなる（上の数値では、終端速度の 90%、99%、99.9% で $T \approx 28, 72, 118$）。これは条件を裏づけている。
- x が小さいとき、比 $PT/\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ はおよそ $1+\frac{2}{3}x$ であり、小問 (i) の予測どおり 1 に近づく。

よくある間違い

- 列車全体ではなく、機関車だけの質量と抵抗を用いてしまう。機関車は $n+1$ 両すべてを引いている。
- **時間**が求められているのに、$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ と書いたり、$v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ を用いたりする。その方法では時間ではなく距離が得られる。
- 小問 (i) で対数を 1 次までしか展開しない。x の項が打ち消し合うので $T \approx 0$ となり、答えが失われてしまう。

STEP のその先へ

方程式 $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = P/v - k$ は 1 階の非線形常微分方程式（ODE）であり、たまたま変数分離形になっている。終端速度 P/k は安定平衡点（stable equilibrium）であり、解はそれに近づくが有限の時間では決して到達しない。解の一意性（uniqueness）が示すように、このふるまいは滑らかな常微分方程式の平衡点の近くでは典型的なものである。小問 (ii) は仕事とエネルギーの定理であり、大学の力学では中心的な指導原理となる。さらに学ぶには Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を、常微分方程式の側面については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。