解答例

STEP II 2009、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP II 2009、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q10

鍵となる考え方

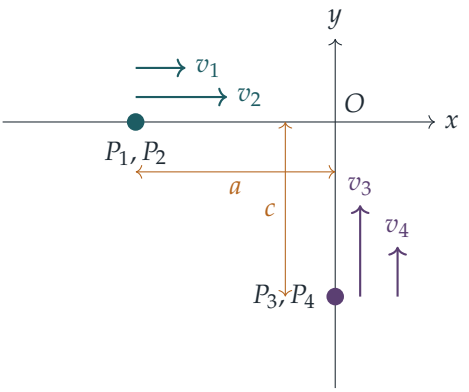
衝突（collision）は 4 回起こるが、力学が必要なのは最初の 2 回だけであり、それによって直後の 4 つの速さが決まる。残りはすべてタイミングの問題である。異なる軸に沿って進む 2 つの質点が「O で衝突する」とは、単に同じ瞬間に O に到達するということにすぎない。したがって、後に起こる各衝突から、距離 / 速さ ＝ 距離 / 速さという形の方程式が 1 つずつ得られる。一方のタイミングの方程式を他方で割ると、未知の距離が消えて、質量に関する条件が残る。

解答

設定

4 つの物体を、なめらかな座標軸上を動く質点（particle）としてモデル化する。したがって、衝突と衝突の間では各質点は等速度で運動する。P_2 は負の x 軸上で O から距離 a の位置から、P_3 は負の y 軸上で O から距離 c の位置から出発するとする。示すべきことは $a = c$ である。

最初の 2 回の（同時に起こる）衝突の瞬間を $t = 0$ とする。これらの衝突は P_2 と P_3 が静止している位置で起こるので、$t = 0$ において質点 P_1 と P_2 はともに O から距離 a の位置にあり、P_3 と P_4 はともに O から距離 c の位置にある。



最初の 2 回の衝突

速さ u で運動する質量 M の質点が、静止している質量 m の質点に反発係数（coefficient of restitution）e で正面衝突（direct collision）し、衝突後の速度がもとの運動方向を正としてそれぞれ V と w になるとする。運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの実験則（Newton's experimental law）から

$$Mu = MV + mw, \qquad w - V = eu,$$

が成り立つので、

$$w = \frac{M(1+e)u}{M+m}, \qquad V = \frac{(M-em)u}{M+m}.$$

これを P_1 が P_2 に衝突する場合と、P_4 が P_3 に衝突する場合に当てはめると、$t = 0$ の直後の O へ向かう向きの速度は次のようになる。

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{m_1(1+e)u}{m_1 + m_2},$$
$$v_4 = \frac{(m_4 - em_3)u}{m_3 + m_4}, \qquad v_3 = \frac{m_4(1+e)u}{m_3 + m_4}.$$

明らかに $v_2, v_3 > 0$ である。P_1 と P_4 は後に O に到達するのだから、依然として O に向かって運動しているはずであり、したがって $v_1 > 0$ かつ $v_4 > 0$ でもある。

後の衝突を利用する

> **考えてみよう** 直交する 2 本の軸上にある 2 つの質点は、どのようにして「衝突」できるのだろうか？

2 本の軸が共有する点は O だけである。したがって「P_2 と P_3 が O で衝突する」とは、単に両者が同時に O に到着するということであり、P_1 と P_4 についても同様である。$t = 0$ から O に到着するまで、各質点は一定の速さで運動する（問題文により、どの

質点についても次に関わる衝突は O で起こる)。よって到着時刻は距離を速さで割ったものであり、

$$\frac{a}{v_2} = \frac{c}{v_3} \qquad (P_2 \text{ と } P_3 \text{ が出会う点は} O), \tag{1}$$

$$\frac{a}{v_1} = \frac{c}{v_4} \qquad (P_1 \text{ と } P_4 \text{ が出会う点は} O). \tag{2}$$

(1) を (2) で割ると、距離が消える：

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}.$$

上の式から、それぞれの比において因子 u と $m_1 + m_2$（または $m_3 + m_4$）が約分されるので、これは

$$\frac{m_1 - em_2}{m_1(1+e)} = \frac{m_4 - em_3}{m_4(1+e)},$$

ということであり、両辺に $m_1 m_4(1+e)$ を掛けると、

$$m_4(m_1 - em_2) = m_1(m_4 - em_3), \qquad \text{よって} \qquad e\,m_2 m_4 = e\,m_1 m_3.$$

$e > 0$ なので e で割ってよく、$m_1 m_3 = m_2 m_4$ となる。すなわち、

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_4}{m_3} = k, \text{ とおく。}$$

ここで v_2 と v_3 に戻る。分子と分母をそれぞれ m_2、m_3 で割ると、

$$v_2 = \frac{k(1+e)u}{k+1} = v_3.$$

したがって P_2 と P_3 は最初の衝突の後に等しい速さで動き出し、(1) より $a = c$ が得られる。ゆえに P_2 と P_3 ははじめ O から等距離にあったことになり、示すべきことが示された。

検算

- $m_1 = 2$、$m_2 = 1$、$m_3 = 3$、$m_4 = 6$（したがって $k = 2$）、$e = \frac{1}{2}$、$u = 1$、$a = c = 1.7$ とする。このとき $v_2 = v_3 = 1$、$v_1 = v_4 = \frac{1}{2}$ であり、P_2 と P_3 は $t = 1.7$ に同時に O に到達し、P_1 と P_4 は問題文のとおりそれより後の $t = 3.4$ に同時に到達する。時間刻みのシミュレーションでも同じ結果になる。
- $v_2 - v_1 = eu > 0$ に注意する。したがって P_1 は確かに P_2 より後に到着し、「しばらく後に」という記述と整合する。
- $e = 0$ の場合は、当然ながらこの議論は破綻する。このとき $v_1 = v_2$ かつ $v_3 = v_4$ となるので (2) は (1) と同じ式になり、$a/c = v_2/v_3$ を満たす任意の a と c が条件を満たしてしまう。問題文が $e > 0$ を課しているのはまさにこのためである。

よくある間違い

- P_1 の移動距離をその出発点から測ってしまう。$t = 0$ 以降、この質点は P_2 がいた位置、すなわち O から距離 a の位置から出発する。(1) と (2) の両方に同じ a が現れるのはこのためである。
- 断りなしに e で割ってしまう。$e = 0$ の場合は本当に事情が異なる。
- P_2 と P_3 の O での衝突を解析しようとしてしまう。その結果については何も必要なく、必要なのは両者が同時にそこに到達するという事実だけである。

STEP のその先へ

質量の条件 $m_1 m_3 = m_2 m_4$ は、2 つの衝突が互いを拡大縮小したコピーになっていることを意味している。正面衝突の後の速度は質量比と e だけで決まるのであり、これは次元解析（dimensional analysis）と相似（similarity）の考え方に初めて触れる機会である。大学では、衝突は重心系（centre-of-mass frame）で考えるのが最もすっきりしており、そこでは反発係数は単に相対速度を定数倍するだけのものになる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような方法で運動量と衝突を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。