解答例

STEP II 2009、第 1 問

純粋数学 • 曲線の対称性

> **STEP II 2009、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q1

鍵となる考え方

ここではほとんど計算を必要としない。対称性（symmetry）がすべてを片づけてくれる。2 つの曲線はどちらも直線 $y = x$ と $y = -x$ に関する鏡映（reflection）で変わらないので、交点（intersection point）を 1 つ求めれば、残りはそれを鏡映して得られる。長方形であることは、4 点の配置からただちに従う。面積については、α と β そのものを求める必要はない。答えに必要なのはそれらのある 1 つの組合せだけであり、それは $\alpha^4 + \beta^4 = u$ と $\alpha\beta = v$ から直接得られる。

解答

対称軸

曲線がある直線に関して対称であるとは、曲線上の任意の点をその直線に関して鏡映した点が、再び曲線上にあることをいう。必要となる 4 つの鏡映は

$$(x,y) \mapsto (-x,y), \quad (x,y) \mapsto (x,-y), \quad (x,y) \mapsto (y,x), \quad (x,y) \mapsto (-y,-x),$$

であり、これらはそれぞれ $x = 0$、$y = 0$、$y = x$、$y = -x$ に関する鏡映である。

曲線 $x^4 + y^4 = u$。 4 乗は符号を区別せず、しかも式は x と y について対称なので、式 $x^4 + y^4$ は 4 つの写像のいずれによっても変わらない。よってこの曲線は 4 本の対称軸（line of symmetry）

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = x, \qquad y = -x.$$

をもつ。

曲線 $xy = v$。 x と y を入れ替えても xy は変わらず、$(-y)(-x) = xy$ であるから $(x, y) \mapsto (-y, -x)$ でも変わらない。一方、一方の座標だけの符号を変えると xy は $-xy$ に移り、$v > 0$ であるから点 $(-x, y)$ は $xy = -v$ 上にあって、もとの曲線上にはない。よってこの直角双曲線（rectangular hyperbola）の対称軸はちょうど 2 本

$$y = x, \qquad y = -x.$$

である。

4 つの交点

$y = x$ に関する鏡映を S、$y = -x$ に関する鏡映を T とする。どちらも 2 つの曲線をそれぞれ自分自身に移すので、交点を交点に移す。$A = (\alpha, \beta)$ から出発すると

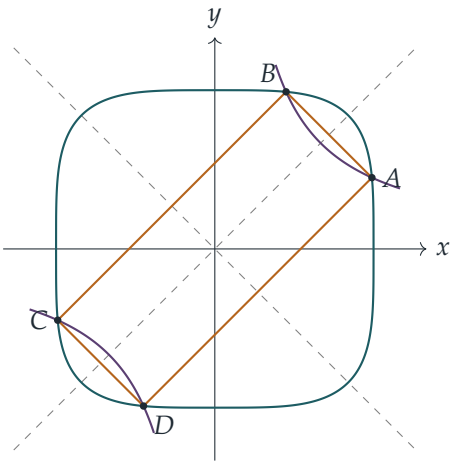
$$S(A) = (\beta, \alpha), \qquad T(A) = (-\beta, -\alpha), \qquad T(S(A)) = (-\alpha, -\beta).$$

を得る。$\alpha > \beta > 0$ であるから、これら 4 点は相異なる。ほかに交点はない。実際、$y = v/x$ を 4 次曲線（quartic）の式に代入すると $x^8 - ux^4 + v^4 = 0$ となり、これは x^4 についての 2 次方程式で正の解は高々 2 個であるから、x の実数値は高々 4 個である。

反時計回りに名前をつけるため、偏角（polar angle）を調べる。$0 < \beta < \alpha$ であるから、点 A の偏角 θ は $0 < \theta < 45°$ を満たす。すると (β, α) の偏角は $90° - \theta$、$(-\alpha, -\beta)$ の偏角は $180° + \theta$、$(-\beta, -\alpha)$ の偏角は $270° - \theta$ である。偏角はこの順に増加するので

$$B = (\beta, \alpha), \qquad C = (-\alpha, -\beta), \qquad D = (-\beta, -\alpha).$$

となる。



（図は $u = 81$、$v = 4$ の場合である。4 次曲線をティール色で、双曲線をプラム色で示している。）

$ABCD$ は長方形である

対角線（diagonal）は AC と BD である。AC の中点（midpoint）は $(\frac{\alpha-\alpha}{2}, \frac{\beta-\beta}{2}) = (0,0)$ であり、同様に BD の中点も $(0,0)$ である。よって対角線は互いに他を二等分し、$ABCD$ は平行四辺形（parallelogram）である。対角線の長さは

$$AC = \sqrt{(2\alpha)^2 + (2\beta)^2} = 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad BD = \sqrt{(2\beta)^2 + (2\alpha)^2} = 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

であり、等しい。対角線の長さが等しい平行四辺形は長方形（rectangle）であるから、$ABCD$ は長方形である。

考えてみよう 対角線の長さが等しい平行四辺形は、なぜ長方形でなければならないのか。

4 つの頂点はすべて O から同じ距離 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ にあるので、O を中心とする円周上にあり、AC と BD はその直径である。半円の弧に対する円周角（angle in a semicircle）は直角であるから、$ABCD$ の各角は直角である。直接確かめるなら、$\overrightarrow{AB} = (\beta-\alpha,\ \alpha-\beta)$、$\overrightarrow{BC} = (-\alpha-\beta,\ -\alpha-\beta)$ であり、その内積（scalar product）は

$$-(\beta-\alpha)(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)[(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)] = 0.$$

となる。

面積

辺の長さは、$\alpha > \beta > 0$ を用いて正の平方根をとると

$$AB = \sqrt{2(\alpha-\beta)^2} = \sqrt{2}\,(\alpha-\beta), \qquad BC = \sqrt{2(\alpha+\beta)^2} = \sqrt{2}\,(\alpha+\beta),$$

である。よって

$$\text{面積} = AB \cdot BC = 2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = 2(\alpha^2-\beta^2).$$

ここで A が両方の曲線上にあること、すなわち $\alpha^4+\beta^4 = u$ かつ $\alpha\beta = v$ を用いる。すると

$$(\alpha^2-\beta^2)^2 = \alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2 = u-2v^2.$$

$\alpha^2-\beta^2 > 0$ であるから正の平方根をとって

$$\boxed{\text{面積}ABCD = 2\sqrt{u-2v^2}}$$

を得る。これより、4 つの相異なる点があるという問題の仮定から $u > 2v^2$ が必然的に従うこともわかる。$u = 2v^2$ ならば $\alpha = \beta$ となり、2 つの曲線は接するだけである。

$u = 81$、$v = 4$ のとき、$u-2v^2 = 81-32 = 49$ であるから、面積は $2\times 7 = 14$ となり、題意のとおりである。

検算

$u = 81$、$v = 4$ に対して $x^8 - 81x^4 + 256 = 0$ を数値的に解くと、$\alpha \approx 2.9690$、$\beta = 4/\alpha \approx 1.3472$ を得る。このとき $2(\alpha^2 - \beta^2) \approx 14.000$ であり、4 頂点に靴ひも公式（shoelace formula）を適用しても同じ面積が得られる。u が $2v^2$ に向かって減少すると、各象限（quadrant）の 2 点は $y = x$ 上で一致し、長方形はつぶれて線分になる。これは面積 $2\sqrt{u - 2v^2} \to 0$ と合致する。

よくある間違い

- 座標軸を $xy = v$ の対称軸として挙げてしまう。座標軸に関して鏡映すると、第 1 象限の枝は第 2 象限に移るが、そこでは $xy < 0$ である。
- 点の名前を誤った順につけてしまう。たとえば $B = (-\alpha, -\beta)$ とすると、$ABCD$ をたどったときに辺が交差する四角形になる。
- α と β を具体的に求めようとする。面積に必要なのは $\alpha^2 - \beta^2$ だけであり、これは u と v から直接得られる。

STEP のその先へ

$x^4 + y^4 = u$ を保つ 4 つの鏡映と回転は、正方形の対称性の群、すなわち位数 8 の二面体群（dihedral group）をなす。双曲線が保つのはそのうち位数 4 の部分群（subgroup）だけである（2 つの鏡映、半回転（half-turn）、恒等変換（identity））。交点は 2 つの曲線に共通する対称性によって置換される。このように群の作用によって対象を見つけることは、大学 1 年次の群論（group theory）の主題の 1 つである。これらの考え方に触れるには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。