解答例

STEP I 2009、第 9 問

力学 ・ 放物体の衝突

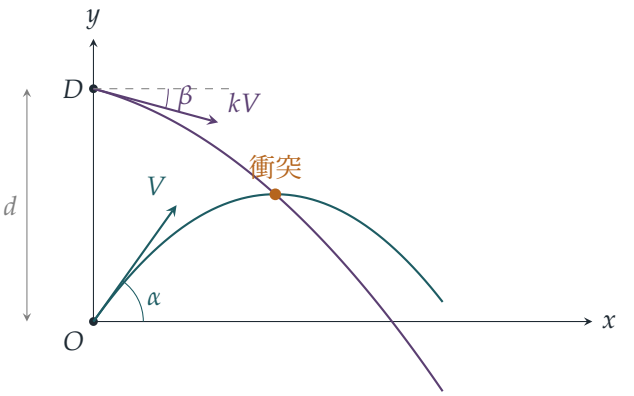
> **STEP I 2009、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q9

鍵となる考え方

重力のみを受けて運動する 2 つの粒子は同じ加速度（acceleration）をもつので、位置を比べると $-\frac{1}{2}gt^2$ の項は打ち消し合う。すなわち、互いに対して見れば、両者は等速度で直線運動をする。衝突とは、同じ時刻 T において水平方向の変位と鉛直方向の変位がともに等しくなることである。水平方向の式からただちに余弦の関係式が得られる。鉛直方向の式には β が含まれるが、これは $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$ と余弦の関係式を用いて消去する。

解答

P と Q を、空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する粒子（particle）としてモデル化する。両者が衝突するためには、同じ鉛直面内で、同じ水平方向に向かって投射されなければならない。O を原点とし、その方向に水平な x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。このとき D は $(0, d)$ である。



時刻 t における位置は

$$P: \quad x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2,$$
$$Q: \quad x = kVt\cos\beta, \qquad y = d - kVt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

である。ここで Q の鉛直方向の速度に負号がつくのは、β が水平方向から**下向きに**測った角だからである。

余弦の関係式と T の方程式

衝突の瞬間には $t = T > 0$ であり、座標が一致する。水平方向については

$$VT\cos\alpha = kVT\cos\beta,$$

であり、$VT \neq 0$ で割ると、求める $\cos\alpha = k\cos\beta$ が得られる。

鉛直方向については、両辺の $-\frac{1}{2}gT^2$ の項が打ち消し合い、

$$VT\sin\alpha = d - kVT\sin\beta, \qquad \text{よって} \qquad kVT\sin\beta = d - VT\sin\alpha.$$

が残る。

考えてみよう β をどのように消去すればよいか？

$k\cos\beta$ は α で表されているので、2 乗して $k^2\sin^2\beta$ を導入する。これは

$$k^2\sin^2\beta = k^2 - k^2\cos^2\beta = k^2 - \cos^2\alpha.$$

である。鉛直方向の式を 2 乗して代入すると、

$$(k^2 - \cos^2\alpha)V^2T^2 = d^2 - 2dVT\sin\alpha + V^2T^2\sin^2\alpha,$$
$$(k^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 = 0,$$
$$(k^2 - 1)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 = 0,$$

となる。ここで $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ を用いた。これが求める方程式である。

T についての 2 次方程式（quadratic）とみると、$k>1$ より 2 つの解の積は $-d^2/((k^2-1)V^2)<0$ である。したがって正の解はちょうど 1 つであり、その解が衝突の時刻である。

P の最高点での衝突

P の鉛直方向の速度は $V\sin\alpha-gt$ であり、これは $t=V\sin\alpha/g$ のとき 0 になる。よってこの場合 $T=V\sin\alpha/g$ である。2 次方程式に代入すると

$$(k^2-1)\frac{V^4\sin^2\alpha}{g^2}+\frac{2dV^2\sin^2\alpha}{g}-d^2=0.$$

g^2 を掛けて $\sin^2\alpha$ の項をまとめると $\sin^2\alpha\,((k^2-1)V^4+2gdV^2)=g^2d^2$ となるので、

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{g^2d^2}{V^2((k^2-1)V^2+2gd)}}$$

である。$k>1$ より括弧内は正なので、この式は意味をもつ。

不等式

$\sin^2\alpha\le1$ であり、分母は正なので、

$$\begin{aligned}g^2d^2&\le(k^2-1)V^4+2gdV^2,\\ g^2d^2-2gdV^2+V^4&\le k^2V^4,\\ (gd-V^2)^2&\le(kV^2)^2.\end{aligned}$$

$|gd-V^2|$ と kV^2 はともに非負なので、平方根をとっても不等号の向きは保たれ、$|gd-V^2|\le kV^2$ が得られる。特に $gd-V^2\le kV^2$、すなわち

$$gd\le(1+k)V^2,$$

が成り立ち、これが求める結果である。等号が成り立つには $\sin^2\alpha=1$、すなわち P が鉛直に投射されることが必要である。

検算

- $g=10$、$V=10$、$k=2$、$d=10$ とする。公式から $\sin^2\alpha=\frac{100\cdot100}{100(300+200)}=\frac15$ となり、$T=V\sin\alpha/g=1/\sqrt5$ である。このとき 2 次方程式は $3\cdot100\cdot\frac15+2\cdot10\cdot10\cdot\frac15-100=60+40-100=0$ となる。$\cos\beta=\cos\alpha/2$ とすると、時刻 T において両粒子はともに高さ 1 にある。また $gd=100\le300=(1+k)V^2$ である。

- 数値的な検証として、ランダムに選んだ数千組の V、k、α、T について両方の運動を時間刻みで追跡し、衝突、余弦の関係式、2 次方程式、$\sin^2\alpha$ の公式が丸め誤差の範囲で成り立つことを確認した。
- 極限の場合：$\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ とすると $\cos\beta \to 0$ ともなるので、両者とも鉛直に運動する。P は時間 V/g で高さ $V^2/(2g)$ まで上昇し、その間に Q は $kV^2/g + V^2/(2g)$ だけ落下するので、$d = (1+k)V^2/g$ となる。予想どおり等号が成り立つ。

よくある間違い

- Q の鉛直方向の速度の符号を誤る。水平方向より**下向きに**投射されるので、それは $-kV\sin\beta$ である。
- $\frac{1}{2}gT^2$ の項を残してしまう。これらは打ち消し合い、T の方程式には g が含まれない。
- $(gd - V^2)^2 \le k^2V^4$ の平方根をとる際に、絶対値に触れずに $gd - V^2 \le kV^2$ としてしまう。結論は正しいが、その根拠は $x \le |x|$ である。

STEP のその先へ

重力が打ち消し合うことは、座標系（frame of reference）の変換を初めて味わう体験である。加速度 g で自由落下する座標系では、両粒子はともに等速で直線運動をし、衝突の問題は相対速度の幾何学に帰着する。これはアインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）の背後にある考え方であり、これを使うと投射体の迎撃問題の多くが 1 行で解けてしまう。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と非慣性系（non-inertial frame）を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。