解答例

STEP I 2009、第 8 問

純粋数学 ・ 円と接線

> **STEP I 2009、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q8

鍵となる考え方

円が直線に接する（touch）のは、円の中心からその直線までの距離が半径に等しいとき、かつそのときに限る。円 C の中心はすべて、原点を通り x 軸と $3y = 4x$ のなす角を二等分する直線上にあるので、どの円も両方の直線に接する。したがって C は、その角の内側に収まる円全体の族であり、小問 (ii) の内接円（incircle）はそのうちの一つでなければならない。あとは、円が第三の辺にも接するような t の値を選べばよいだけである。

解答

小問 (i)

円 C は中心 $P = (2t, t)$、半径 t である。$t > 0$ であるから、中心は x 軸の上側にあり、x 軸からの距離は t で、これは半径に等しい。よって C は点 $(2t, 0)$ で $y = 0$ に接する。

直線 OP の傾き（gradient）は $\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$ であるから、$\tan\alpha = \frac{1}{2}$ であり、

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

となって、示すべき式が得られた。

次に、β を x 軸と直線 $3y = 4x$ のなす鋭角とする。この直線の傾きは $\frac{4}{3}$ である。すると $\tan\beta = \frac{4}{3} = \tan 2\alpha$ となる。$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$（$\tan\alpha = \frac{1}{2} < 1$ だから）であるので、角 2α も鋭角であり、tan は鋭角の範囲で一対一（one-to-one）であるから、$\beta = 2\alpha$ である。

考えてみよう $\beta = 2\alpha$ であることから、なぜ C が $3y = 4x$ に接するといえるのか。

直線 OP は x 軸と角 α をなし、直線 $3y = 4x$ と角 $\beta - \alpha = \alpha$ をなすので、OP は二直線のなす角を二等分する。P からそれぞれの直線に垂線を下ろすと、斜辺（hypotenuse）OP を共有し、O における角がともに α である二つの直角三角形ができるので、二つの垂線の長さは等しく、どちらも $OP\sin\alpha$ である。x 軸までの距離は t であるから、P から $3y = 4x$ までの距離も半径 t に等しい。よって C は $3y = 4x$ に接する。

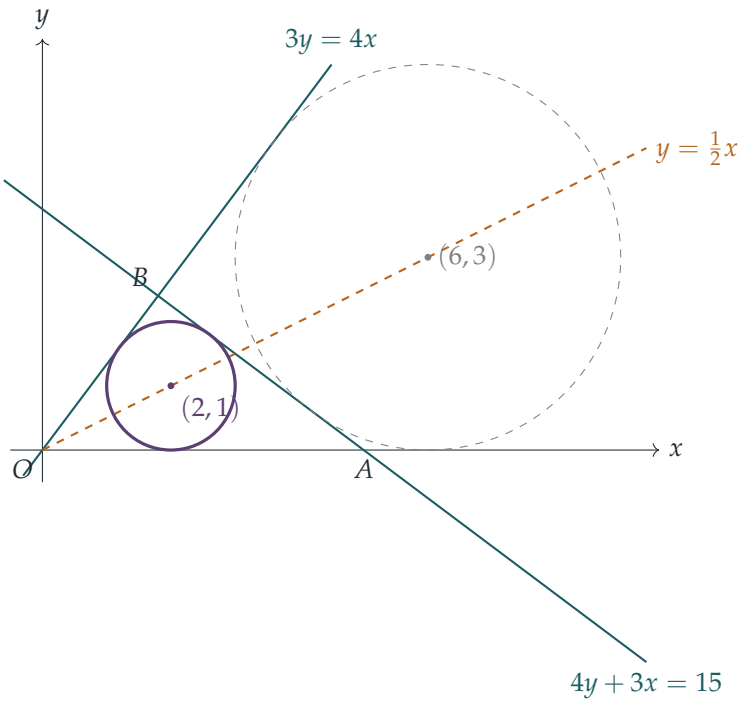
（確認として、点と直線の距離の公式を用いると、$(2t, t)$ から $4x - 3y = 0$ までの距離は $\frac{|8t-3t|}{5} = t$ となる。）

小問 (ii)

まず三角形を求める。直線 $y = 0$ と $3y = 4x$ は $O = (0,0)$ で交わり、$y = 0$ と $4y + 3x = 15$ は $A = (5,0)$ で交わる。三つ目の頂点を求めるため、$y = \frac{4}{3}x$ を $4y + 3x = 15$ に代入すると、

$$\tfrac{16}{3}x + 3x = 15 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}, \qquad y = \tfrac{12}{5},$$

となるので、$B = (\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$ である。$3y = 4x$ と $4y + 3x = 15$ の傾きは $\frac{4}{3}$ と $-\frac{3}{4}$ で、その積は -1 であるから、この三角形は B で直角をもつ。辺の長さは $OA = 5$、$OB = 3$、$AB = 4$ である。



内接円は三角形の内部にあるので、O の近くでは、正の x 軸と直線 $3y = 4x$ のなす鋭角の中に収まり、両方の直線に接している。その中心は二直線から等距離にあるので、その角の二等分線（bisector）上にあり、これは小問 (i) より直線 $y = \frac{1}{2}x$（直線 OP）である。中心を $(2t, t)$（$t > 0$）とすると、$y = 0$ からの距離は t であり、これが半径でなければならない。よって内接円は小問 (i) の円 C の一つである。

残るは、C を第三の辺 $3x + 4y - 15 = 0$ にも接させることである。$(2t, t)$ からこの直線までの距離が t に等しくなければならないので、

$$\frac{|6t + 4t - 15|}{5} = t \quad \Longleftrightarrow \quad |10t - 15| = 5t.$$

$10t - 15 = 5t$ のときは $t = 3$、$15 - 10t = 5t$ のときは $t = 1$ となる。

どちらの円も三本の直線すべてに接するが、三角形の内部にあるのは一方だけである。$t = 3$ のとき、中心 $(6, 3)$ では $3x + 4y = 30 > 15$ となるので、中心は AB に関して O（$3x + 4y = 0 < 15$）と反対側にある。これは**傍接円**（excircle）であり、図の破線の円である。$t = 1$ のとき、中心 $(2, 1)$ では $3x + 4y = 10 < 15$ であり、さらに $y = 0$ の上側、$3y = 4x$ の下側にあるので、三角形の内部にある。中心が三角形の内部にあり三辺すべてに接する円は三角形の内部にあるので、内接円は中心 $(2, 1)$、半径 1 の円

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

である。

検算

直角をはさむ二辺が a, b、斜辺が c の直角三角形では、内接円の半径（inradius）は $\frac{1}{2}(a+b-c)$ である。ここでは $\frac{1}{2}(3+4-5)=1$ となり、求めた値と一致する。内接円の半径は面積 / 半周長（semi-perimeter）$= 6/6 = 1$ としても求められる。数値的にも、内心（incentre）を頂点の辺の長さによる重み付き平均 $\frac{4O+3A+5B}{12}$ として計算すると、ちょうど $(2,1)$ になり、$(2,1)$ から三本の直線までの距離はいずれも 1 である。

よくある間違い

- $|10t-15| = 5t$ を絶対値（modulus）を外さずに解いて $t=3$ だけを求めてしまう。これは内接円ではなく傍接円である。
- 二つの解を両方求めたものの、なぜ $t=1$ が三角形の内部にある方なのかを説明していない。
- 小問 (i) で、両方の角が鋭角であることに触れずに、$\tan\beta = \tan 2\alpha$ だから $\beta = 2\alpha$ と述べてしまう。

STEP のその先へ

どの三角形にも内接円が一つと傍接円が三つあり、それら四つの中心は内角の二等分線と外角の二等分線の交点である。ここで得られた $t=3$ の値は、O に対する傍接円である。これらの円は、九点円（nine-point circle）や、九点円がこれら四つの円すべてに接するというフォイエルバッハ（Feuerbach）の定理をはじめとする、古典幾何学の豊かな世界への入り口となる。これを探究するには、コクセター（Coxeter）の *Introduction to Geometry*（幾何学入門）が定番である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の上級問題集）には、STEP 形式の演習問題がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。