解答例

STEP I 2009、第 7 問

純粋数学 ・ 部分積分

> **STEP I 2009、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q7

鍵となる考え方

最初の積分は、「部分積分を 2 回行うと元の積分が戻ってくる」という古典的な技法である。2 回目のステップで元の積分が右辺に再び現れるので、それを方程式の未知数のように解けばよい。**すべての**整数 m について $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$ の公式が得られれば、後半の小問は単なる整理作業になる。すなわち、正弦と余弦の積を単一の余弦の和に直せば、それぞれはすぐに積分できる。

解答

一般の積分

$I_m = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$ とおき、簡単のため $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1$ とする。$u = \cos mx$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$I_m = \Big[\mathrm{e}^x \cos mx\Big]_0^{2\pi} + m \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x.$$

m は整数なので $\cos 2m\pi = 1$ であり、括弧の部分は $\mathrm{e}^{2\pi} - 1 = E$ となる。今度は $u = \sin mx$ として再び部分積分を行うと、

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin mx\Big]_0^{2\pi} - m \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = 0 - mI_m,$$

となる。ここでも m が整数であることを用いて $\sin 2m\pi = \sin 0 = 0$ とした。以上を合わせると、

$$I_m = E - m^2 I_m, \qquad \text{よって} \qquad (m^2+1) I_m = E.$$

考えてみよう 一周して I_m が戻ってきてしまった。これは行き詰まりだろうか。

そうではない。これこそ望んでいた形である。等式 $I_m = E - m^2 I_m$ は未知の数 I_m についての 1 次方程式であり、$m^2 + 1 \neq 0$ なのでこれで割ることができる：

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2+1}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1),$$

これが示すべき式である。($m = 0$ の場合も含まれている。そのときは単に $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = E$ を表す。）整数という条件は境界項を簡単にするために使われたことに注意しよう。m が整数でなければ、この公式は成り立たない。

小問 (i)

加法定理（compound-angle formulae）で展開すると、$\sin A \sin B$ の項が打ち消し合う：

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B.$$

$A = 6x$、$B = x$ とすると $\cos x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 5x)$ を得る。したがって、一般の結果で $m = 7$ と $m = 5$ とすれば、

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos x \cos 6x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}(I_7 + I_5) = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{50} + \frac{1}{26}\Big)E \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{26+50}{1300} E = \frac{76}{2600} E = \frac{19}{650}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1),\end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (ii)

積和の変換（product-to-sum）を 2 段階行う必要がある。加法定理を足すのではなく引くと $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$ が得られるので、$A = 4x$、$B = 2x$ とすれば、

$$\sin 2x \sin 4x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x).$$

これに $\cos x$ を掛け、それぞれの積に小問 (i) の恒等式を用いると、

$$\begin{aligned}\sin 2x \sin 4x \cos x &= \tfrac{1}{2}\cos 2x \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 6x \cos x \\ &= \tfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) - \tfrac{1}{4}(\cos 7x + \cos 5x).\end{aligned}$$

これで各項は $m = 3, 1, 7, 5$ として一般の結果で扱える：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}(I_3 + I_1 - I_7 - I_5) \\ &= \tfrac{1}{4}\Big(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{50} - \frac{1}{26}\Big)E \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \frac{65 + 325 - 13 - 25}{650}\,E = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{352}{650}\,E.\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{44}{325}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1).$$

検算

- $\dfrac{\mathrm{e}^x(\cos mx + m \sin mx)}{m^2 + 1}$ を微分すると $\mathrm{e}^x \cos mx$ になるので、これは原始関数（antiderivative）である。2π と 0 で値を求めれば、一般の結果が再現される。
- 小問 (ii) の恒等式に $x = 0$ を代入すると、左辺は 0、右辺は $\frac{1}{4}(1 + 1 - 1 - 1) = 0$ となり、一致する。
- 数値的に（シンプソンの公式（Simpson's rule）で）計算すると、小問 (i) の積分は 15.6236…、小問 (ii) の積分は 72.3619… であり、$E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1 \approx 534.49$ として $\frac{19}{650}E$ および $\frac{44}{325}E$ と一致する。

よくある間違い

- 2 回目の部分積分での符号の誤り。$\sin mx$ の導関数は $+m\cos mx$ であり、部分積分の公式から来るマイナス符号と合わせて $-m^2 I_m$ となる。
- 積和の変換の各段階で係数 $\frac{1}{2}$ を忘れ、小問 (ii) で $\frac{1}{4}$ ではなく $\frac{1}{2}$ が付いてしまう。

STEP のその先へ

より鮮やかな方法として、$\cos mx = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$ と書けば、$I_m = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}m)x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re} \dfrac{E}{1 + \mathrm{i}m} = \dfrac{E}{1 + m^2}$ となり、部分積分はまったく必要ない。後半の小問で行ったように関数を成分 $\cos mx$ に分解することは、フーリエ級数（Fourier series）の出発点であり、大学 1 年次の解析学や微分方程式における中心的な道具である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）には読みやすい入門があり、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的複素解析）は、指数関数の視点がなぜこれほどうまく機能するのかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。