解答例

STEP I 2009、第 6 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 2009、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q6

鍵となる考え方

積分の上下端 $1/m$ と m は $x \mapsto 1/x$ によって入れ替わるので、まず試すべきはこの置換（substitution）である。この置換は区間をそれ自身に写し、累乗 x^{-n} を累乗 u^{n-1} に変える。小問 (ii) を使えば、小問 (iii) の扱いにくい部分を小問 (i) の扱いやすい積分の形に直すことができる。(iii)(b) では区間がもはや対称ではないが、同じ置換によって $[1,2]$ は $[\frac{1}{2},1]$ に写り、二つの部分がつながって一つになる。

解答

小問 (i)

x^2 を $x+1$ で割ると

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

となる。したがって、区間上で $x+1>0$ であるから（$m>0$ より）、

$$\int_{1/m}^{m} \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_{1/m}^{m}.$$

対数の部分は

$$\ln(m+1) - \ln\left(\frac{1}{m}+1\right) = \ln\frac{m+1}{(m+1)/m} = \ln m.$$

となる。多項式の部分は

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(m^2-\frac{1}{m^2}\right)-\left(m-\frac{1}{m}\right) &= \left(m-\frac{1}{m}\right)\left[\tfrac{1}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right)-1\right]\\ &= \frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{m^2-2m+1}{2m}\\ &= \frac{(m-1)(m+1)(m-1)^2}{2m^2} = \frac{(m-1)^3(m+1)}{2m^2}.\end{aligned}$$

となる。二つの部分を足し合わせれば、求める結果が得られる。

小問 (ii)

$x = 1/u$ とおくと、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ である。$x = 1/m$ のとき $u = m$、$x = m$ のとき $u = 1/m$ である。また

$$x^n(x+1) = \frac{1}{u^n}\cdot\frac{1+u}{u} = \frac{u+1}{u^{n+1}}.$$

である。よって

$$\begin{aligned}\int_{1/m}^{m}\frac{1}{x^n(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{m}^{1/m}\frac{u^{n+1}}{u+1}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u\\ &= \int_{1/m}^{m}\frac{u^{n-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

となる。ここで、負号を使って上下端を元の向きに入れ替えた。これが求める結果である。

小問 (iii)

(a) 被積分関数（integrand）を分解する：

$$\frac{x^5+3}{x^3(x+1)} = \frac{x^2}{x+1}+\frac{3}{x^3(x+1)}.$$

区間は $[\frac{1}{2},2]$ であり、これは小問 (ii) の区間で $m=2$ としたものである。小問 (ii) を $n=3$ として用いると

$$\int_{1/2}^{2}\frac{3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = 3\int_{1/2}^{2}\frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u,$$

となり、これは第一の部分の 3 倍である。小問 (i) で $m=2$ とすると

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1^3\cdot 3}{2\cdot 4}+\ln 2 = \frac{3}{8}+\ln 2.$$

である。したがって積分の値は $4(\frac{3}{8}+\ln 2)$、すなわち

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}+4\ln 2.$$

である。

(b) 今度は

$$\frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)} = \frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3(x+1)}.$$

である。

考えてみよう 今度の区間は $[1,2]$ であり、$[1/m, m]$ の形ではない。それでも小問 (ii) は役に立つだろうか？

役に立つ。置換 $x = 1/u$ は正の数からなる任意の区間で使うことができ、単に上下端が移るだけである。小問 (ii) とまったく同じ計算を、$x = 1$ のとき $u = 1$、$x = 2$ のとき $u = \frac{1}{2}$ として行えば

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u.$$

がわかる。これは第一の部分と同じ被積分関数を、隣り合う区間で積分したものである。よって二つを合わせると、小問 (i) で $m = 2$ とした積分になる：

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2.$$

残りの部分は

$$\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 3 - \ln 2.$$

である。足し合わせると

$$\int_1^2 \frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{8} + \ln 3.$$

となる。

検算

- 小問 (i) で $m = 1$ とすると、1 点上の積分となり、実際に右辺は $0 + \ln 1 = 0$ となる。また m を $1/m$ に置き換えると積分は符号が反転するはずであり（上下端が入れ替わるため）、実際に公式の符号も反転する。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）によると、(iii)(a) の値は 4.272589 となり、$\frac{3}{2} + 4\ln 2 \approx 4.272589$ と一致する。(iii)(b) の値は 1.473612 となり、$\frac{3}{8} + \ln 3 \approx 1.473612$ と一致する。
- (b) の妥当性の確認：$[1,2]$ 上で被積分関数は 1.5 から約 1.37 まで下がり、その後約 1.71 まで上がるので、答えが 1.47 付近であるのは妥当である。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ から生じる負号を忘れること、あるいは上下端を入れ替えるのを忘れること。両方を行わなければならず、その二つが打ち消し合う。
- (iii)(b) で、区間が $[\frac{1}{2}, 2]$ であるかのように小問 (ii) を適用すること。置換によって $[1, 2]$ は $[\frac{1}{2}, 1]$ に移るのであり、まさにそのおかげで各部分がうまく組み合わさるのである。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto 1/x$ は区間 $[1/m, m]$ の対称性（symmetry）であり、定義域の対称性を利用して積分どうしを関係づけるのは、解析学で繰り返し現れる技法である。たとえば、$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$ を示すのにもこの方法が使われる。複素解析では、同じ反転（inversion）$z \mapsto 1/z$ が単位円の内側と外側を入れ替え、基本的な道具となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）には、反転についての美しい幾何学的な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。