解答例

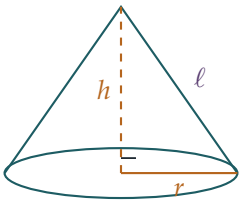
STEP I 2009、第 5 問

純粋数学 • 制約付き最適化

> **STEP I 2009、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q5

鍵となる考え方

長さは 3 つあるが、自由に動けるのは 2 つだけである。r、h、ℓ はピタゴラス（Pythagoras）の定理 $\ell^2 = r^2 + h^2$ で結びついているからである。さらに 1 つの量を固定すると自由度がもう 1 つ減るので、各小問では停留（stationary）させたい量を r だけの関数として表し、微分すればよい。平方根があると計算が煩雑になるので、代わりに V^2 や A^2 を扱うのが得策である。これらが停留するのは、V や A が停留するところとちょうど一致する。



解答

以下では常に r、h、ℓ は正であり、断面に現れる直角三角形から

$$\ell^2 = r^2 + h^2.$$

が成り立つ。$V > 0$ かつ $A > 0$ であるから、V^2 の導関数（derivative）は $2V \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ であり、これが 0 になるのは $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ が 0 になるときとちょうど一致する。A についても同様である。したがって、代わりに 2 乗した量の停留点（stationary point）を求めればよい。

小問 (i)

A を固定すると $\ell = \dfrac{A}{\pi r}$ であるから、

$$h^2 = \ell^2 - r^2 = \frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2.$$

（実際に円錐（cone）となるためには $h > 0$、すなわち $A > \pi r^2$ が必要である。）このとき

$$\begin{aligned} V^2 = \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2 &= \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 \left(\frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2\right) \\ &= \tfrac{1}{9}\left(A^2 r^2 - \pi^2 r^6\right). \end{aligned}$$

A を定数とみて r で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}(V^2)}{\mathrm{d}r} = \tfrac{1}{9}\left(2A^2 r - 6\pi^2 r^5\right) = \tfrac{2}{9} r\left(A^2 - 3\pi^2 r^4\right).$$

$r > 0$ であるから、これが 0 になるのはちょうど

$$A^2 = 3\pi^2 r^4,$$

のときであり、これが 1 つ目の結果である。正の平方根をとると $A = \sqrt{3}\,\pi r^2$ であるから、

$$\ell = \frac{A}{\pi r} = \frac{\sqrt{3}\,\pi r^2}{\pi r} = \sqrt{3}\, r,$$

となり、示すべき式が得られた。（$A = \sqrt{3}\,\pi r^2 > \pi r^2$ であるから、これは確かに円錐になっていることに注意する。）

r がこの値を通って増加するとき、V^2 の導関数は正から負に変わるので、この停留値は最大値（maximum）である。すなわち、与えられた側面積（curved surface area）に対して体積が最大となる円錐である。また $\ell^2 = r^2 + h^2$ から $h^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$、よって $h = \sqrt{2}\, r$ も得られる。

小問 (ii)

今度は V を固定するので $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$ であり、

$$\begin{aligned} A^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) &= \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 \cdot \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} \\ &= \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}. \end{aligned}$$

V を定数とみて r で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}r} = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3},$$

となり、これが 0 になるのはちょうど

$$V^2 = \tfrac{2}{9}\pi^2 r^6, \qquad \text{よって} \qquad V = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\pi r^3$$

のときである（$V > 0$ であるから正の根をとった）。

考えてみよう V を r で表すことはできたが、問題が求めているのは h である。どうすればそこにたどり着けるだろうか。

体積の公式 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ をもう一度使えばよい。これを $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi r^3$ と等しいとおき、$\frac{1}{3}\pi r^2$ で割ると

$$h = \sqrt{2}\, r.$$

が得られる。今度は導関数が負から正に変わる（r が小さいときは項 $9V^2/r^2$ が非常に大きく、r が大きいときは項 $\pi^2 r^4$ が非常に大きい）ので、これは与えられた体積に対して側面積が最小となる円錐である。

考えてみよう 両方の小問で同じ形 $h = \sqrt{2}\, r$ が得られたのは偶然だろうか。

偶然ではない。ある円錐がその側面積に対して体積を最大にしているならば、その体積に対して側面積も最小にしている。実際、同じ体積でより小さい側面積をもつ円錐があったとすると、それを元の側面積になるまで拡大すれば、より大きな体積をもつことになり、これは不可能である。この問題で決まるのは相似を除いた形だけなので、両方の小問は同じ比 $h : r$ を選び出すはずである。

検算

- 小問 (i) で $r = 1$ とすると、$A = \sqrt{3}\,\pi$、$\ell = \sqrt{3}$、$h = \sqrt{2}$ であり、確かに $\pi r \ell = \sqrt{3}\,\pi$ となる。A を $\sqrt{3}\,\pi$ に保ったまま r を 0.99 や 1.01 に少しずらすと、体積はわずかに小さくなる。
- ランダムに固定した A に対して V を数値的に最大化し、ランダムに固定した V に対して A を数値的に最小化すると、常に $h/r \approx 1.41421$、すなわち $\sqrt{2}$ が得られた。
- 次元（dimensions）：A^2 と $\pi^2 r^4$ はどちらも（長さ）^{4}、V^2 と $\pi^2 r^6$ はどちらも（長さ）^{6} である。

よくある間違い

- ℓ が r と h に依存することを忘れること。実際に固定されているのは A（または V）だけなのに、小問 (i) で ℓ を、あるいは小問 (ii) で h を定数として扱ってしまう。

- 平方根を残したまま V を直接微分すること。それでも解けるが、誤りを犯しやすい。先に 2 乗しておけば、合成関数の微分法（chain rule）を使わずに済む。

STEP のその先へ

ある量を固定したまま別の量の極値を求めることは、**制約付き最適化**（*constrained optimisation*）の問題である。大学では、変数を消去せずに制約を扱えるラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法（Lagrange multipliers）を学ぶ。この方法は、ここでの 2 つの小問の間にある「双対性（duality）」も説明してくれる。多変数の微積分（multivariable calculus）とラグランジュの未定乗数法をわかりやすく初めて学ぶには、Stewart, *Calculus* を読んでみるとよい。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* には、STEP 形式の最適化の演習がさらに載っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。