解答例

STEP I 2009、第 4 問

純粋数学 • 余弦定理

> **STEP I 2009、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q4

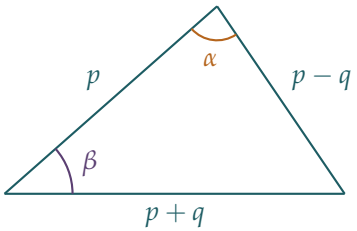
鍵となる考え方

三角形では、最大の角は最長の辺の対角であり、最小の角は最短の辺の対角である。したがって余弦定理（cosine rule）により $\cos\alpha$ と $\cos\beta$ が p と q で直接表され、恒等式（identity）は単なる式変形で示せる。後半では、$\alpha = 2\beta$ より、2 倍角の公式（double-angle formula）を用いて $\cos\alpha$ を $\cos\beta$ で表すことができる。すると恒等式は $\cos\beta$ だけの方程式になる。

解答

恒等式

$p-q < p < p+q$ であるから、最大の角 α は辺 $p+q$ の対角であり、最小の角 β は辺 $p-q$ の対角である。



α について余弦定理を用いると

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + (p-q)^2 - (p+q)^2}{2p(p-q)} = \frac{p^2 - 4pq}{2p(p-q)} = \frac{p-4q}{2(p-q)},$$

となり、β については

$$\cos\beta = \frac{p^2+(p+q)^2-(p-q)^2}{2p(p+q)} = \frac{p^2+4pq}{2p(p+q)} = \frac{p+4q}{2(p+q)}.$$

となる。ここで p で約分したが、$p>0$ であるからこれは許される。すると

$$1-\cos\alpha = \frac{2(p-q)-(p-4q)}{2(p-q)} = \frac{p+2q}{2(p-q)},$$
$$1-\cos\beta = \frac{2(p+q)-(p+4q)}{2(p+q)} = \frac{p-2q}{2(p+q)},$$

であるから

$$4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) = \frac{(p+2q)(p-2q)}{(p-q)(p+q)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.$$

一方、

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= \frac{(p-4q)(p+q)+(p+4q)(p-q)}{2(p^2-q^2)}\\ &= \frac{(p^2-3pq-4q^2)+(p^2+3pq-4q^2)}{2(p^2-q^2)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.\end{aligned}$$

2 つの式は一致するので、題意のとおり $4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ が成り立つ。

(三角形が存在するためには $(p-q)+p>p+q$、すなわち $p>2q$ が必要である。このとき恒等式の両辺はともに正であるが、上の式変形はこの条件に依存しない。)

$\alpha = 2\beta$ の場合

$c=\cos\beta$ とおく。すると $\cos\alpha=\cos 2\beta = 2c^2-1$ であるから、$1-\cos\alpha = 2(1-c^2) = 2(1-c)(1+c)$ となる。これを恒等式に代入すると

$$8(1-c)^2(1+c) = 2c^2+c-1 = (2c-1)(c+1).$$

考えてみよう 両辺を $1+c$ で割ってよいだろうか？

よい。β は三角形の内角であるから $0<\beta<\pi$ であり、$c=\cos\beta>-1$、すなわち $1+c\neq 0$ である。これで割ると

$$8(1-c)^2 = 2c-1 \quad\Longrightarrow\quad 8c^2-18c+9=0 \quad\Longrightarrow\quad (4c-3)(2c-3)=0.$$

よって $c=\frac{3}{4}$ または $c=\frac{3}{2}$ である。余弦は 1 を超えないので、$\frac{3}{2}$ は不適である。したがって、題意のとおり $\cos\beta=\frac{3}{4}$ である。

辺の比

前半で求めた $\cos\beta$ の式を用いると

$$\frac{p+4q}{2(p+q)} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad 4p+16q = 6p+6q \quad \Longrightarrow \quad p = 5q.$$

これは $p > 2q$ を満たすので、三角形は存在する。その辺は $p-q = 4q$、$p = 5q$、$p+q = 6q$ であるから、辺の比は

$$4 : 5 : 6.$$

である。

検算

3 辺が $4, 5, 6$ の三角形において、余弦定理より $\cos\beta = \frac{25+36-16}{60} = \frac{3}{4}$、$\cos\alpha = \frac{16+25-36}{40} = \frac{1}{8}$ である。また $2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$ であり、これにより $\alpha = 2\beta$ が確かめられる（2 つの角はともに $(0,\pi)$ にあり、そこでは余弦は単射（one-to-one）である）。数値的には $\beta \approx 0.7227$、$\alpha \approx 1.4455$ ラジアンである。この三角形では、恒等式は $4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{8} = \frac{1}{8}+\frac{3}{4}$ となる。さらに、$p > 2q$ を満たす 10^5 個のランダムな三角形で恒等式を試したところ、両辺は 3×10^{-15} 以内の誤差で一致した。

よくある間違い

- 角と辺の対応を誤る。最大の角は**最長の**辺 $p+q$ の対角である。
- 因数 $1+c$ が 0 でない理由を述べずに約分してしまう、あるいは解 $c = \frac{3}{2}$ を残してしまう。
- 3 辺の比 $4 : 5 : 6$ ではなく、$p = 5q$ を答えとしてしまう。

STEP のその先へ

相似なものを同一視すれば、3 辺が等差数列（arithmetic progression）をなし、最大の角が最小の角の 2 倍であるような三角形は、3 辺が $4, 5, 6$ の三角形ただ 1 つである。「辺の長さが整数で、角が与えられた比をなす三角形はどのようなものか？」といった問いは、ピタゴラス数（Pythagorean triples）の場合と同じように、すぐにディオファントス方程式（Diophantine equations）や、曲線上の有理点（rational points）のパラメータ表示へとつながっていく。こうした考え方の発展を見るには Davenport の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）がよく、STEP 風の幾何と三角法の問題をさらに解きたければ Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。